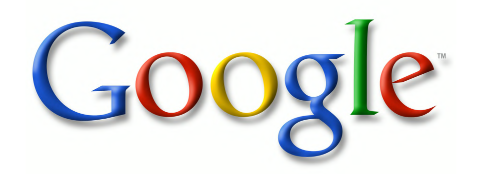


OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 194.

Die erste Integralrechnung

Eine Auswahl aus

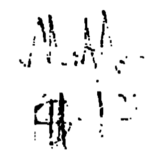
Johann Bernoullis

Mathematischen Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderes.

Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben
von
Dr. Gerhard Kowalewski

Mit 119 Textfiguren

WILHELM ENGELMANN LEIPZIG UND BERLIN





OSTWALDS KLASSIKER
DER
EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

8. Gebunden.

Erschienen sind bis jetzt aus dem Gebiete der

Mathematik:

Nr. 1. **H. Helmholtz,** Erhalt. der Kraft. (1847.) 7. Taus. (60 S.) *M* 1.—.
» 2. **C. F. Gauss,** Allgem. Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfern. wirk. Anziehungs- u. Abstoß.-Kräfte. (1840.) Herausg. v. A. Wangerin. 3. Aufl. (60 S.) *M* 1.—.
» 5. —— Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. v. Wangerin. 4. Auflage. (64 S.) *M* 1.—.
» 10. **F. Neumann,** Die mathematischen Gesetze d. inducirten elektrischen Ströme. (1845.) Herausg. v. C. Neumann. (96 S.) *M* 1.90.
» 11. **Galileo Galilei,** Unterred. u. mathem. Demonstrat. über zwei neue Wissenszweige usw. (1638.) 1. Tag m. 13 u. 2. Tag m. 26 Fig. i. Text. Aus d. Ital. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. Dritter, unveränderter Abdruck. (142 S.) *M* 3.75.
» 14. **C. F. Gauss,** Die 4 Beweise der Zerleg. ganzer algebr. Funktionen usw. (1799—1849.) Hrsg. v. E. Netto. 3. Aufl. Mit 1 Taf. (81 S.) *M* 1.90.
» 17. **A. Bravais,** Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. u. in Gemeinschaft mit P. Groth herausgeg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) *M* 1.25.
» 19. Über die Anzieh. homogener Ellipsoide, Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausgeg. von A. Wangerin. 2. Aufl. (118 S.) *M* 2.50.
» 24. **Galileo Galilei,** Unterred. u. math. Demonstrat. üb. 2 neue Wissenszweige usw. (1638.) 3. u. 4. Tag, m. 90 Fig. i. Text. Aus d. Ital. u. Lat. übers. u. hrsg. v. A. v. Oettingen. 2. Aufl. (141 S.) *M* 2.50.
» 25. —— Anh. z. 3. u. 4. Tag, 5. u. 6 Tag, mit 23 Fig. im Text. Aus d. Ital. u. Latein. übers. u. herausg. v. A. v. Oettingen. 2., unveränderter Abdruck. (66 S.) *M* 1.50.
» 36. **F. Neumann,** Theorie inducirter elektr. Ströme. (1847.) Herausgeg. von C. Neumann. Mit 10 Fig. im Text. (96 S.) *M* 1.90.
» 46. Abhandlg. über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696); **Jac. Bernoulli** (1697) u. **Leonhard Euler** (1744). Herausg. v. P. Stäckel. Mit 19 Textfig. (144 S.) *M* 2.50.
» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgeg. von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) *M* 2.—.
» 53. **C. F. Gauss,** Die Intensität der erdmagnet. Kraft auf absolutes Maß zurückgeführt. Herausgeg. von E. Dorn. (62 S.) *M* 1.25.
» 54. **J. H. Lambert,** Anm. u. Zusätze zur Entw. d. Land- u. Himmelscharten. (1772.) Herausg. v. A. Wangerin. Mit 21 Textfig.

Nr. 55. **Lagrange** und **Gauss**, Kartenprojection. (1779 u. 1822.) Herausg. von A. Wangerin. Mit 2 Textfiguren. (102 S.) ℳ 2.—.

» 60. **Jacob Steiner**, Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten u. zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 25 Textfig. 2. Aufl. (85 S.) ℳ 1.50.

» 61. **G. Green**, Versuch, die math. Analysis auf die Theorien d. Elektric. u. des Magnetismus anzuwenden. (1828.) Herausgegeben von A. v. Oettingen und A. Wangerin. (140 S.) ℳ 2.25.

» 64. **C. G. J. Jacobi**, Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abelschen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.90.

» 65. **Georg Rosenhain**, Abhandl. über die Functionen zweier Variabler mit 4 Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.90.

» 67. **A. Göpel**, Entwurf einer Theorie der Abelschen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.25.

» 69. **James Clerk Maxwell**, Über Faradays Kraftlinien. (1855 u. 1856.) Herausgegeben von L. Boltzmann. 2. Aufl. (130 S.) ℳ 2.50.

» 71. **N. H. Abel**, Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdots$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.25.

» 73. **Leonhard Euler**, Zwei Abhandlg. über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französ. u. Latein. übersetzt u. herausgeg. von E. Hammer. Mit 6 Fig. im Text. (65 S.) ℳ 1.25.

» 75. **Axel Gadolin**, Abhandlg. über die Herleitung aller krystallograph. Systeme mit ihren Unterabtheil. aus einem einzigen Prinzipe. (Gelesen den 19. März 1867.) Deutsch herausgeg. von P. Groth. Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. (92 S.) ℳ 1.90.

» 76. **F. E. Neumann**, Theorie der doppelt. Strahlenbrech., abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik. (1832.) Herausg. v. A. Wangerin. (52 S.) ℳ 1.—.

» 77. **C. G. J. Jacobi**, Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus determinantium.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.50.

» 78. —— Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.50.

» 79. **H. v. Helmholtz**, 2 hydrodynamische Abhandlungen. I. Über Wirbelbewegungen. (1858.) — II. Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. (1868.) Herausgeg. von A. Wangerin. (80 S.) ℳ 1.50.

» 80. —— Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. (1859.) Herausgeg. von A. Wangerin. (132 S.) ℳ 2.50.

» 82. **Jacob Steiner**, Systemat. Entwickl. der Abhängigkeit geometr. Gestalten voneinander, mit Berücksichtig. der Arbeiten alter u. neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie d. Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität usw. (1832.) I. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 14 Textfig. u. 2 Tafeln. (126 S.) ℳ 2.50.

» 83. **Jacob Steiner**. II. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Textfig. u. 2 Tafeln. (162 S.) ℳ 3.—.

Nr. 90. **A. Bravais,** Abhandlung über die Systeme von regelmäßig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.50.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet,** Untersuch. über verschiedene Anwendungen d. Infinitesimalanalysis auf d. Zahlentheorie. (1839—1840.) Deutsch herausgeg. von R. Haussner. 128 S.) ℳ 2.50.

» 93. **Leonhard Euler,** Drei Abhandlungen üb. Kartenprojection. (1777.) Herausg. von A. Wangerin. Mit 9 Textfig. (78 S.) ℳ 1.50.

» 99. **R. Clausius,** Über die bewegende Kraft d. Wärme. (1850.) Herausg. von Max Planck. Mit 4 Textfiguren. (55 S.) ℳ 1.—.

» 101. **G. Kirchhoff,** Abhandlung über mechanische Wärmetheorie: 1. Ein Satz der mechan. Wärmetheorie u. Anwendung. (1858.) 2. Spannung d. Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. (1858.) — 3. Spannungen d. Dampfes von Mischungen aus Wasser u. Schwefelsäure. Herausg. v. Max Planck. (48 S.) ℳ 1.—.

» 102. **James Clerk Maxwell,** Über physikal. Kraftlinien. Herausgeg. von L. Boltzmann. Mit 12 Textfiguren. (147 S.) ℳ 3.—.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. v. Oettingen, herausgeg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 3.25.

» 106. **D'Alembert,** Dynamik. (1743.) Übersetzt und herausgegeben von Arthur Korn. Mit 4 Tafeln. (210 S.) ℳ 4.50.

» 107. **Jakob Bernoulli,** Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ars conjectandi.) (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgeg. von R. Haussner. Mit 1 Textfigur. (162 S.) ℳ 3.15.

» 108. ——— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Textfig. (172 S.) ℳ 3.40

» 109. **Riccardo Felici,** Mathematische Theorie der electro-dynamischen Induction. Übersetzt von B. Dessau. Herausgeg. von E. Wiedemann. (121 S.) ℳ 2.25.

» 111. **N. H. Abel,** Abhandl. über eine besond. Klasse algebraisch auflösb. Gleichungen. Herausg. von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ 1.10.

» 112. **Augustin-Louis Cauchy,** Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. (1825.) Herausgeg. von P. Stäckel. (80 S.) ℳ 1.60.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandl. zur Theorie d. partiellen Differentialgleich. erster Ordnung. Aus d. Französ. übers. und herausgeg. von Gerhard Kowalewski. (54 S.) ℳ 1.25.

» 116. **Lejeune Dirichlet,** Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) u. **Philipp Ludwig Seidel,** Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuierl. Functionen darstellen (1847). Herausgegeben v. Heinrich Liebmann. (58 S.) ℳ 1.25.

» 117. **Gaspard Monge,** Darstellende Geometrie. (1798.) Übersetzt und herausg. von Robert Haussner. Mit 72 Figuren im Text und in den Anmerkungen. (217 S.) ℳ 5.—.

» 122. **Carl Friedrich Gauss,** Sechs Beweise des Fundamentaltheorems über quadrat. Reste. Herausg. v. Eugen Netto. (111 S.) ℳ 2.25.

» 123. **Jacob Steiner,** Einige geometrische Betrachtungen. (1826.) Herausgegeben von Rudolf Sturm. Mit 46 Figuren im Text u. in den Anmerkungen. (125 S.) ℳ 2.50.

» 124. **H. Helmholtz,** Abhandlungen zur Thermodynamik. Herausgegeben von Max Planck. (84 S.) ℳ 1.75.

» *127.* **Jean Baptiste Joseph Baron Fourier,** Die Auflös. der bestimmten *Gleich. (Analyse des équations déterminées.)* (IV u. 262 S.) ℳ 5.—.

Die erste Integralrechnung

Eine Auswahl aus

Johann Bernoullis

Mathematischen Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderes

aufgeschrieben zum Gebrauch des Herrn

Marquis de l'Hospital

in den Jahren 1691 und 1692
als der Verfasser sich in Paris aufhielt

Mit 119 Textfiguren

Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben

von

Dr. Gerhard Kowalewski
o. ö. Prof. an der k. k. deutschen Universität zu Prag



Leipzig und Berlin
Verlag von Wilhelm Engelmann
1914



Mathematische Vorlesungen über die Methode der Integrale und anderes.

Erste Vorlesung.

Über die Natur und die Berechnung der Integrale.

Wir haben im vorigen*) gesehen, wie die Differentiale der Größen zu finden sind. Jetzt werden wir umgekehrt zeigen, wie die Integrale der Differentiale gefunden werden, d. h. diejenigen Größen, von denen die Differentiale herrühren. Nun ist schon aus dem oben Gesagten bekannt, daß dx das Differential von x ist und xdx das Differential von $\frac{1}{2}x^2$ oder $\frac{1}{2}x^2 +$ oder $-$ einer konstanten Größe, x^2dx das Differential von $\frac{1}{3}x^3$ oder $\frac{1}{3}x^3 +$ oder $-$ usw. und x^3dx das Differential von $\frac{1}{4}x^4 +$ oder $-$ einer konstanten Größe, ebenso auch

adx	das	Differential	von	ax	usw.
$axdx$	»	»	»	$\frac{1}{2}ax^2$	»
ax^2dx	»	»	»	$\frac{1}{3}ax^3$	»
ax^3dx	»	»	»	$\frac{1}{4}ax^4$	»

usw.

Hieraus läßt sich folgende allgemeine Regel bilden:

$$ax^p dx \text{ ist das Differential von } \frac{a}{p+1} x^{p+1}.$$

Wenn also von irgendeiner Differentialgröße das Integral zu nehmen ist, so muß man vor allem erwägen, ob nicht die vor-

*) Der Verfasser meint die Vorlesungen über Differentialrechnung, die vorangingen, und die er unterdrücken zu müssen glaubte, weil alles in jenen Vorlesungen enthaltene von Herrn *l'Hospital* in sein allgemein verbreitetes Buch übernommen worden ist, das er betitelt hat: Analyse des infiniment petits[1].

gelegte Größe das Produkt irgendeines Differentials mit einem Vielfachen seines zu einer gewissen Potenz erhobenen Absoluten ist. Dies ist dann ein Zeichen, daß man das Integral nach der obigen Regel finden kann. Wenn z. B. von der Größe $dy\sqrt{a+y}$ das Integral zu finden ist, so sehe ich zuerst, daß dy mit einem Vielfachen seines Absoluten $a+y$, erhoben zur Potenz $\frac{1}{2}$, multipliziert ist; darauf suche ich nach der obigen Regel davon das Integral, nämlich

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(a+y)^{\frac{1}{2}+1}, \text{ d. h. } \tfrac{2}{3}(a+y)\sqrt{a+y}.$$

Ebenso findet man das Integral von $xdx\sqrt[3]{a^2+x^2}$, welches lautet

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}+1}(a^2+x^2)^{\frac{1}{3}+1} = \tfrac{3}{8}(a^2+x^2)\sqrt[3]{a^2+x^2};$$

das Integral von $dy : \sqrt{a+y}$ gleich $2\sqrt{a+y}$, das Integral von $dx : x$ gleich[2])

$$\tfrac{1}{0}x^0 = \tfrac{1}{0} \times 1 = \infty.$$

Es ist zu bemerken, daß manchmal Größen vorkommen, deren Integrale beim ersten Anblick sich nicht nach dieser Regel finden zu lassen scheinen. Man findet sie aber leicht nach einer gewissen Umänderung, wie in den folgenden Fällen.

1. Wenn man für

$$dx\sqrt{a^2x^2+x^4} \text{ schreibt } xdx\sqrt{a^2+x^2},$$

so findet man das Integral, nämlich $(\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}x^2)\sqrt{a^2+x^2}$. Und wenn man für

$$dx\sqrt{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3} \text{ schreibt } (adx+xdx)\sqrt{a+x},$$

so findet man das Integral $\frac{2}{5}(a^2+2ax+x^2)\sqrt{a+x}$.

2. Auch umgekehrt kommt es vor, daß man einen oder einige Buchstaben unter das Wurzelzeichen ziehen muß, bevor man das Integral nehmen kann, wie bei folgendem Beispiel

$$(3ax^3dx+4x^4dx)\sqrt{ax+x^2}.$$

Hiervon läßt sich das Integral nach unserer Regel, wie es scheint, nicht nehmen. Wenn man aber ein x hineinzieht, entsteht

$$(3ax^2dx+4x^3dx)\sqrt{ax^3+x^4},$$

wovon man jetzt das Integral nach der Regel

$$= \frac{2}{3}(ax^3 + x^4)\sqrt{ax^3 + x^4}$$

findet.

3. Wenn ein Bruch vorkommt, dessen Nenner ein Quadrat oder ein Kubus oder eine andere Potenz ist, so muß man deren Wurzel als absolute Größe wählen. So ist hier bei

$$\frac{xdx}{a^4 + 2a^2x^2 + x^4}$$

als absolute Größe $a^2 + x^2$ zu wählen, und man erhält dann $-1:(2a^2 + 2x^2)$. Wenn man als absolute Größe $a^4 + 2a^2x^2 + x^4$ wählte, ließe sich das Integral des Bruches nicht nach der Regel erhalten.

4. Wenn von zwei Größen für sich genommen das Integral nicht gefunden werden kann, so kommt es manchmal vor, daß man es aus ihrer Verbindung erhalten kann. Beispiel:

$$\frac{adx}{\sqrt{2ax + x^2}} + \frac{xdx}{\sqrt{2ax + x^2}}.$$

Von keiner der Größen für sich hat man das Integral[3]). Das Integral ihrer Summe

$$\frac{adx + xdx}{\sqrt{2ax + x^2}}$$

ist aber $\sqrt{2ax + x^2}$.

5. Ein Bruch scheint manchmal kein Integral zu haben. Multipliziert man aber seinen Zähler und Nenner mit derselben Größe, so läßt sich nachher sein Integral leicht erhalten. So ist es bei

$$\frac{adx + xdx}{\sqrt{3a + 2x}}.$$

Man multipliziere Zähler und Nenner mit x. Dann erhält man

$$\frac{axdx + x^2dx}{\sqrt{3ax^2 + 2x^3}},$$

wovon das Integral $\frac{1}{3}\sqrt{3ax^2 + 2x^3}$ lautet.

6. Umgekehrt sind manchmal Zähler und Nenner durch dieselbe Größe zu dividieren, um das Integral erhalten zu können. Beispiel:

$$\frac{ax^2dx}{\sqrt{a^2x^2 + x^4}}.$$

Man dividiere jedes Glied durch x. Dann erhält man

$$\frac{axdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Davon lautet das Integral nach der Regel $a\sqrt{a^2 + x^2}$.

7. Es kommt auch vor, daß sich das Integral der vorgelegten Größe nach der Regel nicht erhalten läßt. Wenn man aber eine andere Größe, deren Integral man hat, hinzu addiert, so kommt etwas heraus, wovon sich das Integral nehmen läßt. Nimmt man daher von diesem Integral das der addierten Größe fort, so bleibt das gesuchte Integral übrig. Beispiel:

$$xdx\sqrt{a + x}.$$

Es sei hiervon das Integral zu nehmen. Da dies auf einfache Weise nicht geschehen kann, addiere man zu der vorgelegten Größe diese $adx\sqrt{a + x}$. Es ergibt sich dann

$$(adx + xdx)\sqrt{a + x},$$

wovon das Integral nach der Regel

$$= \tfrac{2}{5}(a + x)^2\sqrt{a + x}$$

gefunden wird. Wenn man hiervon das Integral von $adx\sqrt{a + x}$ fortnimmt, das

$$\tfrac{2}{3}a(a + x)\sqrt{a + x}$$

lautet, so bleibt übrig

$$\tfrac{2}{5}(a + x)^2\sqrt{a + x} - \tfrac{2}{3}a(a + x)\sqrt{a + x}$$

als Integral der vorgelegten Größe $xdx\sqrt{a + x}$.

Auf dieselbe Weise findet man das Integral von

$$x^2dx\sqrt{a + x}.$$

Man hat nämlich das Integral von

$$(a^2 + 2ax + x^2)dx\sqrt{a + x},$$

wie auch das der Größe

$$a^2dx\sqrt{a + x}.$$

und nach dem soeben Gefundenen das von

$$2axdx\sqrt{a + x}.$$

Daher hat man auch das Integral des übrigbleibenden Bestandteils $x^2dx\sqrt{a+x}$.

Auf dieselbe Weise wird man das Integral der Größe $x^3dx\sqrt{a+x}$ oder $x^4dx\sqrt{a+x}$ und sogar $x^pdx\sqrt{a+x}$ finden. So wird auch, wenn eine aus mehreren Gliedern bestehende Größe vorliegt, ihr Integral nach Teilen gefunden. Eine solche Größe ist

$$(2ax^3+x^4)dx\sqrt{a+x}.$$

Ich suche zuerst das Integral des ersten Teiles $2ax^3dx\sqrt{a+x}$ auf, dann das des zweiten $x^4dx\sqrt{a+x}$. Ihre Summe gibt das Integral des Ganzen.

Erinnerung.

Dies sind die hauptsächlichsten Fälle, die beim Bilden von Integralen vorkommen können. Zwar bleiben mehrere, ja sogar unendlich viele andere noch übrig, mit deren Hilfe man zu den Integralen gelangt. Aber sie fallen nicht alle ins Gedächtnis, und dann kann man die meisten auf die hier angeführten reduzieren, so daß sich auch mit Hilfe dieser das Gewünschte erreichen läßt; schließlich bieten sich auch dem aufmerksamen Betrachter tausend Lösungsmethoden und mannigfache Fälle je nach der Natur der gegebenen Größen von selbst dar. Deshalb wäre es nicht weniger unmöglich als unnütz, wenn wir noch mehrere andere außer den angeführten hier beibringen wollten.

Es mag die eine Bemerkung genügen, daß von der Auffindung der Integrale gerade bedeutendere mathematische Probleme und Theoreme abhängen, sowohl bereits gefundene als auch solche, die man noch zu finden wünscht, so z. B. die Quadratur der Flächen, die Rektifikation der Kurven, die Kubatur der Körper, die umgekehrte Tangentenmethode[4]) oder die Auffindung der Natur von Kurven aus gegebenen Eigenschaften der Tangenten, nicht weniger aber das, was zur Mechanik gehört, wie die Methode zur Auffindung des Zentrums der Schwere, des Stoßes, der Schwingung usw. Man erhält auch durch Auffindung von Integralen die Abwicklungen der Kurven und die Art, ihre Natur zu bestimmen und mit Hilfe der Abwicklung die Kurven selbst zu rektifizieren, wie es Herr *Tschirnhaus*[5]) bei seinen Kaustiken gemacht hat.

So leicht es aber ist, von irgend einer vorgelegten Größe das Differential zu finden, so schwer ist es umgekehrt, das Integral irgend eines Differentials anzugeben, so daß wir mitunter nicht einmal sicher behaupten können, ob sich von der vorgelegten Größe das Integral bilden läßt oder nicht. Das wenigstens wage ich zu behaupten, daß von jeder ganzen und rationalen Größe, die mit

$$x^p\sqrt{a^2-x^2},\; x^p\sqrt{ax-x^2},\; x^p\sqrt{a^2+x^2}$$

multipliziert oder dividiert ist, das Integral entweder zu haben oder auf die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel[6]) reduzierbar ist. Dies werden wir im folgenden lehren. Daher ist überhaupt mit Sorgfalt darauf zu achten, ob die vorgelegte Größe, aus der man das Integral gewinnen soll, durch Multiplikation oder durch Division oder durch Wurzelausziehung auf eine Größe reduziert werden kann, in der man eines dieser Wurzelzeichen hat, multipliziert mit einer rationalen und ganzen Größe. Wenn dies geschehen kann, so ist sofort im Ernst zu behaupten, daß sich das Integral der gegebenen Größe erhalten läßt; wenn nicht, daß es von der Quadratur des Kreises oder der Hyperbel abhängt und darauf reduzierbar ist.

Wenn z. B. folgende Größe vorgelegt wird

$$(a^3+ax^2-x^3)dx\sqrt{\frac{a+x}{x}}$$

und davon das Integral zu nehmen ist, so scheint beim ersten Anblick das Integral weder erhältlich zu sein, noch eine Beziehung zur Quadratur des Kreises zu haben. Nimmt man nämlich als absolute Größe das an, was unter dem Integralzeichen steht, also den Bruch $(a+x):x$, so wird auch das Differential davon ein Bruch sein, so daß daraus nach der Regel nichts geschlossen werden kann. Daher multipliziere ich, um dies zu vermeiden, den Zähler und den Nenner des irrationalen Bruches mit dem Zähler, und das Produkt des Zählers mit sich selbst vereinige ich mit dem rationalen Bestandteil der Größe, so daß dann ein Bruch entsteht, dessen Zähler rein rational, und dessen Nenner irrational ist. Es wird nämlich sein

$$(a^3+ax^2-x^3)dx\sqrt{\frac{a+x}{x}}=\frac{(a^4+a^3x+a^2x^2-x^4)dx}{\sqrt{ax+x^2}}.$$

Diese Größe zeigt nun an, daß ihr Integral entweder erhältlich

oder auf die Quadratur der Hyperbel reduzierbar ist. Wie dies aber erkannt werden kann und geschieht, dafür werden unten Regeln gegeben werden.

Es bleibt noch etwas übrig, bevor wir zum Gebrauch und zur Anwendung der Integralrechnung kommen. Wir werden nämlich ein anderes Verfahren zur Bildung der Integrale darlegen, das die allgemeine Methode nicht wenig abkürzt. Denn manchmal ist es wegen der Kompliziertheit der vorgelegten Größen nicht ohne weiteres klar, ob eine solche auf einen der vorgebrachten Fälle zurückführbar ist, und sogar, ob sie ein Integral hat oder nicht. Dieses Verfahren jedoch reduziert die Größe auf wenige Glieder, so daß man dann ohne Mühe das gesuchte Integral findet. Dies geschieht aber, indem man die mit dem Wurzelzeichen behaftete Größe als die absolute annimmt und irgend einem Buchstaben gleichsetzt und dann die gegebene Größe gemäß dieser Annahme in eine andere verwandelt, die nur aus diesem zu Hilfe genommenen Buchstaben besteht. Von dieser Größe, die meistens viel einfacher aussieht, nehme man das Integral, das sich wieder in das gesuchte Integral verwandeln läßt, indem man den Wert des angenommenen Buchstaben einsetzt.

Dies wird besser durch ein Beispiel klar werden. Die Größe, deren Integral gesucht wird, sei

$$(ax + x^2)dx\sqrt{a+x}.$$

Ich setze zu dem Ende $\sqrt{a+x} = y$. Dann wird $x = y^2 - a$ und weiter $dx = 2ydy$, also im ganzen

$$(ax + x^2)dx\sqrt{a+x} = 2y^6dy - 2ay^4dy.$$

Hiervon wird jetzt das Integral leicht und ohne Umschweife sofort gefunden, und zwar $= \frac{2}{7}y^7 - \frac{2}{5}ay^5$. Setzt man nun für y seinen Wert ein, so erhält man

$$\tfrac{2}{7}(x+a)^3\sqrt{x+a} - \tfrac{2}{5}a(x+a)^2\sqrt{x+a}.$$

Auf dieselbe Weise wird das Integral der Größe

$$\frac{(a^2 + 2x^2)\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

gefunden, indem man $\sqrt{a^2+x^2} = y$ setzt. Dann wird $x = \sqrt{y^2 - a^2}$ und $dx = ydy : \sqrt{y^2-a^2}$. Weiter gilt für die Größe selbst

$$(a^2 + 2x^2)dx : \sqrt{a^2 + x^2} = (2y^3 - a^2y)dy : \sqrt{y^4 - a^2y^2}.$$

Hiervon ist das Integral $= \sqrt{y^4 - a^2y^2}$.

Ebenso setze man, wenn man hat

$$\frac{(a-x)dx}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

$\sqrt{2ax - x^2} = y$. Dann wird $x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2}$, $dx = \mp ydy : \sqrt{a^2 - y^2}$ und

$$\frac{(a-x)dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = dy.$$

Hiervon ist das Integral $= y = \sqrt{2ax - x^2}$.

Diese Regel läßt sich nun in unendlich vielen andern Fällen anwenden, und zwar in jenen, die wegen der Kompliziertheit gleichsam als verzweifelt angesehen werden können. Denn abgesehen davon, daß diese Regel die vorgelegte Größe manchmal wesentlich kürzer macht, bietet sie noch dazu den Vorteil, daß sie sofort vor die Augen stellt, ob sich aus der so umgewandelten Größe das Integral nehmen läßt.

Allen diesen Methoden zur Auffindung der Integrale kann man auch die folgende hinzufügen, die wegen ihrer großen Nützlichkeit und Leichtigkeit fast allen übrigen vorzuziehen ist. Diese Methode bezieht sich aber nur auf jene Größen, die mit irrationalen Zeichen verbunden sind. Ihre ganze Anwendung besteht daher darin, daß die irrationalen Größen in rationale verwandelt werden, so daß die vorgelegte Größe ganz den rationalen Charakter annimmt, wonach, wenn es geschehen kann, ihr Integral leicht zu bilden ist. Hierzu führen also in nicht geringem Maße die diophantischen Fragen[7]), die bei solchen Gelegenheiten ausgezeichnete Hilfe leisten, wie es an den Beispielen deutlicher hervortreten wird.

Es sei z. B. von

$$\frac{a^3dx}{x\sqrt{ax - x^2}}$$

das Integral zu nehmen, was nach keiner der vorigen Methoden geschehen kann, durch diese aber in folgender Weise geleistet wird. Da $\sqrt{ax - x^2}$ eine irrationale Größe ist, so muß, damit sie rational gemacht wird, $ax - x^2$ ein Quadrat werden. Es sei also

$$ax - x^2 = \frac{a^2x^2}{m^2}.$$

Nach dieser Annahme wird $x = am^2 : (a^2 + m^2)$ und daher $\sqrt{ax - x^2} = a^2m : (a^2 + m^2)$, $dx = 2a^3mdm : (m^2 + a^2)^2$, also die ganze vorgelegte Größe

$$\frac{a^3dx}{x\sqrt{ax - x^2}} = \frac{2a^3dm}{m^2},$$

wovon sich das Integral leicht erhalten läßt, und zwar ist es $= -2a^3 : m$. Setzt man jetzt den Wert $m = \sqrt{a^2x : (a - x)}$ ein, so ergibt sich

$$-\sqrt{\frac{4a^5 - 4a^4x}{x}} = -2a^2\sqrt{\frac{a - x}{x}}$$

als Integral von $a^3dx : x\sqrt{ax - x^2}$.

Ebenso muß, wenn das Integral von

$$\frac{dx\sqrt[3]{x^2 + 2ax + a^2}}{x}$$

zu nehmen ist, $x^2 + 2ax + a^2$ ein Kubus werden. Es sei also

$$x + a = y^3.$$

Dann wird $x = y^3 - a$ und $dx = 3y^2dy$ und $\sqrt[3]{x^2 + 2ax + a^2} = y^2$. Also wird die ganze Größe

$$\frac{dx\sqrt[3]{x^2 + 2ax + a^2}}{x} = \frac{3y^4dy}{y^3 - a}.$$

Wenn man hiervon das Integral erhalten kann [8]), so hat man auch das Integral der gegebenen Größe.

Zweite Vorlesung.

Über die Quadratur der Flächen.

Unter den mannigfachen Vorteilen, die wir aus der Integralrechnung ziehen, ist fast der erste und hauptsächlichste der bei der Quadratur der Flächen sich bietende. Man betrachtet aber die Flächen als zerlegt in unendlich viele Teile, deren jeder als Differential der Fläche angesehen werden kann. Wenn

man also das Integral dieses Differentials, d. h. die Summe dieser Teile hat, so wird daraus auch die gesuchte Quadratur bekannt.

Jene unendlich kleinen Teile können aber bei den ebenen Flächen auf verschiedene Weisen betrachtet werden, je nachdem es auf die bequemste Weise alle Umstände der Flächen gestatten. Entweder werden nämlich, was das Gewöhnlichste ist, die ebenen Flächen durch unendlich viele Parallelen geteilt, wie in Fig. 1, oder durch unendlich viele Geraden, die

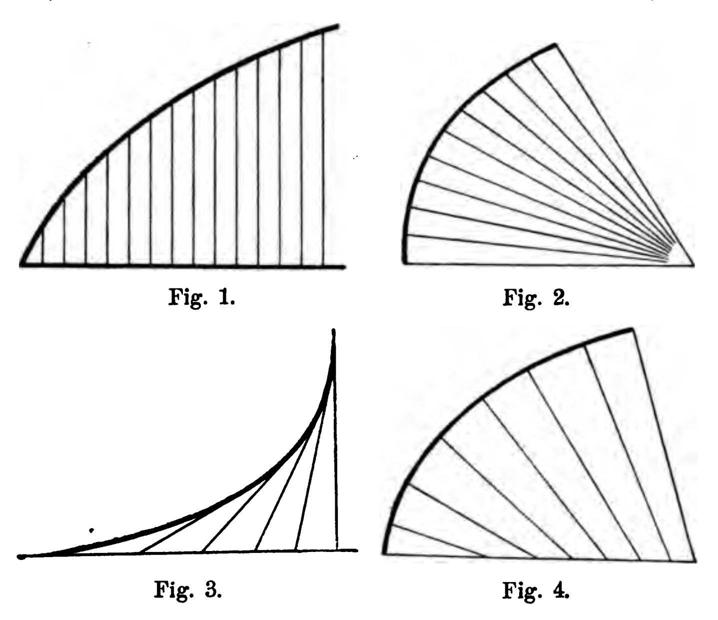


Fig. 1. Fig. 2.

Fig. 3. Fig. 4.

in einem Punkte zusammenlaufen, wie in Fig. 2, oder durch unendlich viele Tangenten, wie in Fig. 3, oder durch unendlich viele Normalen der Kurve, wie in Fig. 4. Diese Teilungen der ebenen Flächen sind allgemein, und jede kann jeder Fläche angepaßt werden. Denn die Fläche besteht, wie immer sie geteilt ist, aus allen ihren Teilen. Meistens wird aber die Teilungsweise ausgewählt, die zu der Natur oder der Erzeugung der Fläche möglichst genau stimmt, und durch die man am kürzesten und leichtesten zur Quadratur gelangt. Es wäre in der Tat ungewöhnlich und gegen die Gesetze einer guten Methode, wenn

jemand die Quadratur der Parabel suchte mittels der Teilung, die Fig. 2 zeigt. Dagegen würde sich einer ungeheuren Mühe vergeblich unterziehen, wer irgend welche Spiralen mittels der Parallelteilung quadrieren wollte, wie sie in Fig. 1 vorliegt. Denn die Natur der Parabel, der parabelartigen und ähnlicher Kurven fordert parallele Teilungslinien. Dagegen zeigt die Erzeugung der Spiralen, daß dort lieber konvergierende anzuwenden sind. Andere spezielle Teilungen können in Anspruch genommen werden, je nachdem es die Natur oder eine Eigenschaft einer gewissen Kurve als zweckmäßig nahelegt. Die konchoidale Fläche $ABCD$ in Fig. 5 z. B. kann man sich zerlegt denken in unendlich viele Trapeze, deren Seiten im Zentrum E konvergieren.

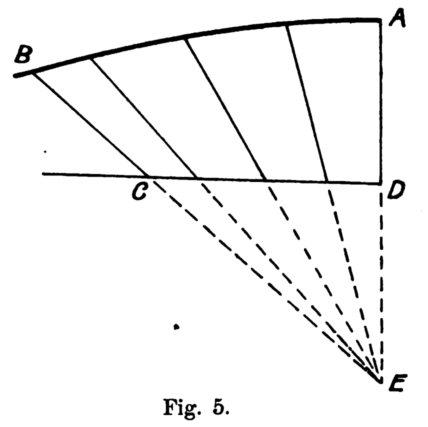


Fig. 5.

Es ist jedoch wahr, daß manchmal Flächen vorkommen, die man sich ebenso leicht auf die eine wie auf die andere Weise zerlegt denken und auf die Rechnung zurückführen kann. Das zeigt sich beim Kreise und bei der Hyperbel, bei denen die Kreisfläche und die Hyperbelfläche sowohl nach parallelen Ordinaten als auch nach Linien, die von einem Zentrum zur Kurve divergieren, gleich bequem geteilt werden kann.

Auf welche Weise schließlich auch (um endlich zu den Quadraturen selbst zu kommen) die Teilung der Flächen gedacht wird, so muß man, wenn man nachher die Gesamtfläche haben will, von einem der unendlich kleinen Teile den Wert suchen, der nur aus bestimmten Buchstaben und einer einzigen Art von Unbestimmten besteht. Das läßt sich immer durch die Natur und die Erzeugung der Kurve erreichen. Von dieser Größe als Differential ist dann das Integral zu finden, das die Quadratur der Fläche bedeutet.

Wenn die Teilungen der Fläche parallel sind, so wird das Differential der Fläche, wenn x als Abszisse und y als Ordinate gedacht ist, ydx sein, nämlich das Rechteck aus der

Ordinate und dem Differential der Abszisse. Ist daher AC (Fig. 6) die gegebene Kurve, so wird y eine gewisse Beziehung zu x haben, so daß sich ydx in x allein ausdrückt. Es sei z. B. AC eine Parabel und daher $ax = y^2$ oder $y = \sqrt{ax}$. Dann wird $ydx = dx\sqrt{ax}$. Das Integral hiervon, das $\frac{2}{3}x\sqrt{ax}$ oder $\frac{2}{3}xy$ lautet, ist die gesuchte Fläche.

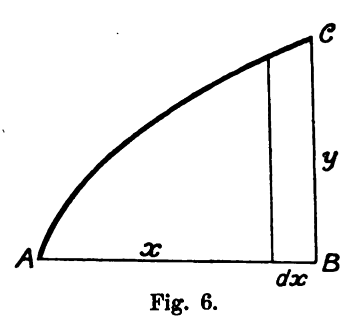


Fig. 6.

Wenn die Teilungen in einem Punkte zusammenlaufen, so ist das Differential der Fläche $\frac{1}{2}ydx$, nämlich das Dreieck, dessen eine Seite y, und dessen Höhe der unendlich kleine Kreisbogen ist, der um den Treffpunkt als Mittelpunkt durch das Ende des kleineren y beschrieben ist und als gerade Linie betrachtet werden muß. Dieser kleine Bogen hat aber immer eine bestimmte Beziehung zu y, je nach der gegebenen Natur der Kurve. Es sei z. B. ABC (Fig. 7) die Fläche der logarithmischen Spirale. Da also y einen konstanten Winkel mit der Kurve bildet, so wird dy zu dx ein konstantes Verhältnis haben, etwa wie a zu b. Es wird dann $dx = bdy : a$ sein, mithin $\frac{1}{2}ydx = ybdy : 2a$. Das Integral hiervon $by^2 : 4a$ ist gleich der Fläche.

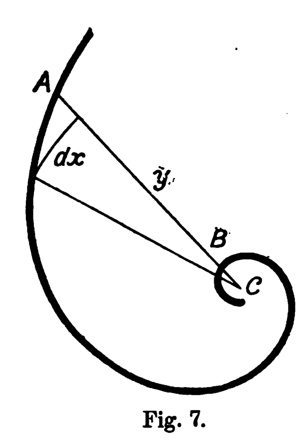


Fig. 7.

Auf dieselbe Weise muß man bei den andern Teilungsweisen verfahren. Wenn aber das Integral von ydx oder $\frac{1}{2}ydx$ sich nicht bilden läßt, und alle oben angegebenen Methoden versucht sind, so ist dies ein Zeichen, daß die vorgelegte Fläche nicht quadrierbar ist, oder wenigstens, daß man ihre Quadratur noch nicht hat. Das begegnet uns bei der Aufsuchung der Quadratur des Kreises und der Hyperbel[9]). Dort kommen wir zu einem Werte ydx, dessen Integral wir bis jetzt nicht finden können. Bei andern Flächen aber, deren Differentiale ydx

sich durch eine rationale Größe ausdrücken, die mit der Ordinate des Kreises oder der Hyperbel multipliziert oder dividiert ist, läßt sich die Quadratur entweder überhaupt erhalten oder wenigstens auf die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel zurückführen. Das haben wir oben versprochen und werden es hier wirklich erledigen. Vorher wollen wir aber gewisse Arten ins Auge fassen, wie das Differential einer Kreis- oder Hyperbelfläche ausgedrückt werden kann.

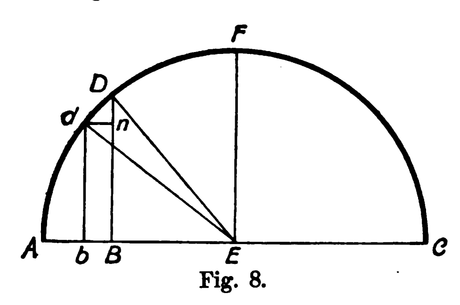


Fig. 8.

ADC sei ein Halbkreis (Fig. 8), $AC = 2a$, $AB = x$, also $DB = \sqrt{2ax - x^2}$ und daher die differentielle Fläche $BDdb = dx\sqrt{2ax - x^2}$, deren Integral das Segment ABD liefert.

Es sei $BE = x$. Dann wird $BD = \sqrt{a^2 - x^2}$, die differentielle Fläche $BDdb = dx\sqrt{a^2 - x^2}$.

Es sei wieder AB das x. Dann wird das Kurvenstückchen $dD = adx : \sqrt{2ax - x^2}$, mithin das Dreieck $DEd = a^2dx : 2\sqrt{2ax - x^2}$. Das Integral hiervon gibt den Sektor AED.

Es sei $BE = x$. Dann wird $dD = $ $= adx : \sqrt{a^2 - x^2}$ und das Dreieck $DEd =$ $= a^2dx : 2\sqrt{a^2 - x^2}$.

ABD sei ein Halbkreis (Fig. 9), $AD = a$, $AB = x$. Dann wird $BD = \sqrt{a^2 - x^2}$, mithin $BC = xdx : \sqrt{a^2 - x^2}$ und das Dreieck $ABC = x^2dx : 2\sqrt{a^2 - x^2}$, das Integral hiervon gleich dem Segment AB.

Fig. 9.

Es sei jetzt ABC eine gleichseitige Hyperbel (Fig. 10), $BD = 2a$, $BF = x$. Dann wird $AF = \sqrt{2ax + x^2}$ und die differentielle Fläche $AFfa = dx\sqrt{2ax + x^2}$, das Integral hiervon gleich der Fläche AFB.

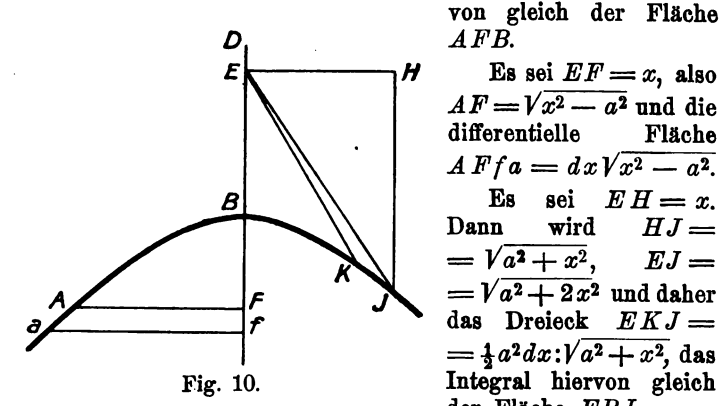


Fig. 10.

Es sei $EF = x$, also $AF = \sqrt{x^2 - a^2}$ und die differentielle Fläche $AFfa = dx\sqrt{x^2 - a^2}$.

Es sei $EH = x$. Dann wird $HJ = \sqrt{a^2 + x^2}$, $EJ = \sqrt{a^2 + 2x^2}$ und daher das Dreieck $EKJ = \frac{1}{2}a^2dx : \sqrt{a^2 + x^2}$, das Integral hiervon gleich der Fläche EBJ.

Wenn $HJ = x$, so ergibt sich das Dreieck $EKJ = \frac{1}{2}a^2dx : \sqrt{x^2 - a^2}$.

Alle diese verschiedenen Ausdrücke schließen eine und dieselbe Quadratur ein, nämlich die des Kreises, bzw. der Hyperbel, aber auf verschiedene Weise ausgeführt. Wenn also das Differential irgendeiner Fläche auf eine dieser Formeln reduziert werden kann, so läßt sich ein Kreis oder eine Hyperbel angeben oder ein Kreis-, bzw. Hyperbelsegment, das der gegebenen Fläche gleich ist.

Alle jene Flächen aber, deren Differential durch eine rationale Größe ausgedrückt wird, die mit der Ordinate des Kreises oder der Hyperbel, d. h. mit $\sqrt{2ax - x^2}$ oder $\sqrt{a^2 - x^2}$ oder mit $\sqrt{2ax + x^2}$ oder $\sqrt{a^2 + x^2}$ oder $\sqrt{x^2 - a^2}$ usw. multipliziert oder dividiert ist, alle jene Flächen, sage ich, werden wir entweder quadrieren oder einem Kreis, bzw. einer Hyperbel gleich machen. Das geschieht so. Wenn die rationale Größe des vorgelegten Differentials aus einem oder mehreren Gliedern besteht, so muß man zusehen, ob etwas zu der gegebenen Größe hinzugefügt oder von ihr abgezogen werden kann, so daß sich nunmehr das Integral nehmen läßt. Hat man alsdann von dem Hinzugefügten oder Abgezogenen ebenfalls das Integral, so wird auch das Integral der gegebenen Größe bekannt werden.

Wenn aber das Hinzugefügte oder Abgezogene das Differential einer Kreis- oder Hyperbelfläche ist, so liegt auf der Hand, daß auch das gesuchte Integral sich auf eine solche Fläche reduzieren läßt. Es wird z. B. gesucht das Integral aus folgender Größe

$$xdx\sqrt{2ax+x^2}.$$

Um dies zu machen, gehe man in folgender Weise vor:

$$xdx\sqrt{2ax+x^2} = (adx+xdx)\sqrt{2ax+x^2} - adx\sqrt{2ax+x^2}.$$

Weil man jetzt das Integral des ersten Bestandteils hat, und das des zweiten die Quadratur der Hyperbel anzeigt, wird der Aufgabe genügt sein.

Wenn aber nicht bekannt wird, was hinzuzufügen oder abzuziehen ist, so läßt sich die Sache doch nach einer allgemeinen Regel lösen. Diese verlangt, daß man vor allem das Wurzelzeichen in den Nenner bringt, so daß der Zähler vollkommen rational wird. Darauf erhebe man das Glied des Zählers, wo die Unbestimmte die meisten Dimensionen hat, auf noch mehr Dimensionen, so daß auch die Größe unter der Wurzel, so oft das obere Glied mit irgendeiner Potenz der Unbestimmten multipliziert wird, mit der doppelten Potenz multipliziert wird; auf diese Weise bleibt nämlich der Bruch immer der gleiche. Die Multiplikation kann also so weit fortgesetzt werden, bis die höchste Dimension der Unbestimmten unter der Wurzel die höchste Dimension im Zähler um 1 übertrifft. Alsdann addiere oder subtrahiere man von dem auf diese Form gebrachten Gliede eine solche Größe, daß sich von der Summe das Integral nehmen läßt; dies kann immer erreicht werden. Darauf muß dasselbe mit dieser addierten oder subtrahierten Größe gemacht werden, aber mit umgekehrtem Zeichen und in Verbindung mit dem nächstfolgenden Gliede. So kommt man schließlich herab bis zu dem letzten Gliede, von dem sich notwendig das Integral nehmen oder dem Kreise oder der Hyperbel gleichmachen läßt. Das wird besser durch ein Beispiel klar.

Die Größe, deren Integral gesucht wird, sei

$$(a^2x+x^3)\,dx\sqrt{x^2-a^2}.$$

Dies wird so durchgeführt:

$$(a^2x + x^3)\,dx\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{(x^5 - a^4x)\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$
$$= (A)\,\frac{(x^9dx - \tfrac{4}{5}a^2x^7)\,dx}{\sqrt{x^{10} - a^2x^8}} - (B)\,\frac{a^4xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$
$$+ (C)\,\frac{\tfrac{4}{5}a^2x^5dx - \tfrac{8}{15}a^4x^3dx}{\sqrt{x^6 - a^2x^4}} + (D)\,\frac{\tfrac{8}{15}a^4xdx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Also ist die vorgelegte Größe

$$(a^2x + x^3)dx\sqrt{x^2 - a^2} = A + B + C + D.$$

A und C haben aber Integrale auf Grund ihrer Herstellung, wie auch die übrigen Glieder B und D, was von selbst klar ist. Daher ist von der ganzen Größe das Integral gefunden.

Ebenso geht es, wenn als Größe, deren Integral zu finden ist,

$$(2ax - x^2)dx\sqrt{2ax - x^2}$$

vorgelegt wird. Dann erhalte ich zuerst mit Hilfe der Multiplikation die Gleichung

$$(2ax - x^2)dx\sqrt{2ax - x^2} = \frac{(4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4)dx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$
$$= (A)\,\frac{(x^7 - \tfrac{7}{4}ax^6)dx}{\sqrt{2ax^7 - x^8}} + (B)\,\frac{(-\tfrac{9}{4}ax^5 + \tfrac{15}{4}a^2x^4)dx}{\sqrt{2ax^5 - x^6}}$$
$$+ (C)\frac{(\tfrac{1}{4}a^2x^3 - \tfrac{3}{8}a^3x^2)dx}{\sqrt{2ax^3 - x^4}} + (D)\,\frac{(\tfrac{3}{8}a^3x - \tfrac{3}{8}a^4)dx}{\sqrt{2ax - x^2}} + (E)\,\frac{\tfrac{3}{8}a^4dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Es kann aber das Integral aus A, B, C, D genommen werden, und der Rest E zeigt, daß der Kreis anzuwenden ist, wie aus dem oben Gesagten hervorgeht. Daher ist das Integral der gegebenen Größe auf die Quadratur des Kreises zurückgeführt, was verlangt war.

Es sei das Integral zu finden aus der Größe

$$\frac{a^4dx}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Wenn $x = a^2 : m$ ist, wird $dx = -a^2dm : m^2$. Die gefundene Größe läßt sich in $-a^2mdm : \sqrt{a^4 \pm a^2m^2}$ verwandeln, wovon das Integral lautet $\mp\sqrt{a^4 \pm a^2m^2}$. Nach Einsetzen des Wertes hat man $\mp\sqrt{a^4 \pm a^6 : x^2}$.

Auf dieselbe Weise geht es, wenn

$$\frac{a^2 dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

vorgelegt wird. Es sei $a^2 + x^2 = m^2$. Dann wird $x^2 = m^2 - a^2$ und $dx = mdm : \sqrt{m^2 - a^2}$ und die ganze Größe

$$\frac{a^2 dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2 dm}{m^2 \sqrt{m^2 - a^2}},$$

wovon man das Integral leicht auf die obige Weise findet.

Dritte Vorlesung.

Quadratur verschiedener Kurven.

Was bisher über die Flächen gesagt worden ist, läßt sich leicht den Körpern anpassen. Die Ebenen, die die Körper in unendlich viele Teile zerlegen, können nämlich als Linien betrachtet werden, die Flächen zerlegen. Dies ist keineswegs widersinnig, wenn man nur annimmt, daß jene Schnitte durch einen konstanten Buchstaben dividiert werden. Aus dieser Annahme ergeben sich dann Linien, die eine Fläche bilden, welche hinsichtlich ihrer Quadratur dieselbe Größe hat, die dem vorgelegten Körper hinsichtlich seiner Kubatur zukommt. Daher werden wir uns bei der Kubatur der Körper nicht besonders aufhalten. Aber wir wollen wenigstens einige Flächen, teils quadrierbare, teils dem Kreise oder der Hyperbel vergleichbare, durcheinandergemischt vorlegen, damit die Handhabung dieser Rechnungsart klar wird. Dabei ist zunächst folgendes zu bemerken. Falls für das Integral des Differentials der vorgelegten Fläche eine negative Größe herauskommt, so zeigt dieser Umstand an, daß es nicht die unmittelbar über der Abszisse enthaltene Fläche ist, die durch diese Größe ausgedrückt wird, sondern die gegenüberliegende Fläche, d. h. die, welche auf der übrigen Achse

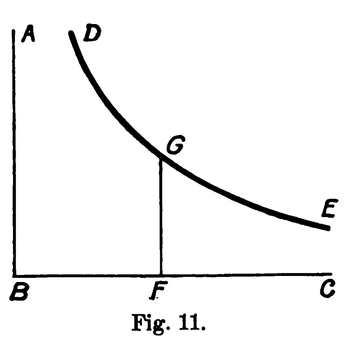


Fig. 11.

steht. Es sei z. B. DGE (Fig. 11) eine Hyperboloide, deren Natur [wenn $BF = x$, $FG = y$ und eine gewisse Konstante $= a$ gesetzt wird] $a^3 = x^2 y$ ist, also $y = a^3 : x^2$ und $y dx = a^3 dx : x^2$. Hiervon ist das Integral $= - a^3 : x$. Dies zeigt, da es negativ ist, daß es nicht gleich der Fläche $ABFGD$ ist, sondern gleich der Restfläche $GFCE$. Das geht auch daraus hervor, daß, je größer x ist, desto kleiner $a^3 : x$ wird. Daher ist hierfür nicht die Fläche $ABFGD$ zu nehmen, weil sie bei wachsendem x selbst wächst[10]. Es genügt, dies zur späteren Beachtung gesagt zu haben. Jetzt folgen einige Aufgaben.

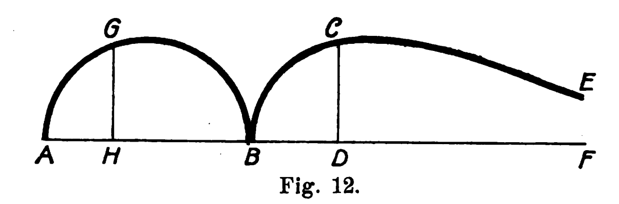


Fig. 12.

I. BCE (Fig. 12) sei eine gewisse Kurve, $AB = a$, $AD = x$, $DC = y$. Die Natur der Kurve ist diese

$$a^7 x - a^8 = x^6 y^2.$$

Gesucht wird die Quadratur der Fläche oder wenigstens ein ihr gleicher Kreis. Das geschieht so. Nach der gegebenen Gleichung ist

$$y = \frac{a^3 \sqrt{ax - a^2}}{x^3}$$

und daher

$$y dx = \frac{a^3 dx \sqrt{ax - a^2}}{x^3}.$$

Es sei $x = a^2 : m$. Dann wird $dx = - a^2 dm : m^2$, $x^3 = a^6 : m^3$ und $\sqrt{ax - a^2} = a \sqrt{(a - m) : m}$, mithin die ganze vorgelegte Größe

$$\frac{a^3 dx \sqrt{ax - a^2}}{x^3} = - dm \cdot \sqrt{am - m^2}.$$

Das Integral hiervon zeigt, da es eine negative Größe ist, daß es nicht der Fläche BCD, sondern der übrigen $FDCE$ gleich ist. Wenn man daher über AB den Halbkreis AGB

beschreibt und $BH = m = a^2 : x$ nimmt, so wird das Segment BHG gleich der Fläche $FDCE$. Daraus folgt, daß die ganze Fläche $BCEF$ gleich dem Halbkreise AGB ist, und daher das Segment AHG gleich der Fläche BCD. Dabei ist beiläufig zu bemerken, daß im Falle $BD = \frac{1}{5}AB$ die Ordinate DC ein Maximum wird.

Bei dieser Aufgabe wird, wenn man $a = x$ setzt, $x^6y^2 = 0$ und infolgedessen $y = 0$. Daraus läßt sich schließen, daß die der Aufgabe genügende Kurve im Punkte B anfängt. Wenn aber $x = \infty$ ist, wird $x - a = x$ und $a^7x = x^6y^2$, $a^7 = x^5y^2$ oder, wenn man die Gleichung auf eine Proportion reduziert, $x^5 : a^5 = a^2 : y^2$. Weil also x^5 unendlich viel größer als a^5 ist, wird a^2 auch unendlich viel größer sein als y^2. Daher ist y in diesem Falle $= 0$, d. h., die Kurve BCE und die Gerade ABF treffen noch einmal im Unendlichen zusammen.

II. ADK (Fig. 13) ist eine konchoidische Kurve. Es wird die Fläche $ABGD$ gesucht. Es sei $AB = GD = BC = a$, $HC = x$, $HJ = dx$, $HB : BC = HJ : JG$; daher wird $JG = adx : \sqrt{x^2 - a^2}$; $CG : CD = GJ : DF$; mithin $DF = (ax + a^2)\,dx : x\sqrt{x^2 - a^2}$. Es ist aber $(DF + GI) \cdot \frac{1}{2}DG =$ dem Trapez FG und somit das Trapez

Fig. 13.

$$FG = \frac{(2a^2x + a^3)dx}{2x\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Das Integral hiervon ist daher gleich der Fläche $ABGD$. Es wird aber in folgender Weise gebildet:

$$\frac{(2a^2x + a^3)\,dx}{2x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{a^3dx}{2x\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Das Integral des ersten Bestandteils erhält man, indem man eine gleichseitige Hyperbel MNO herstellt (Fig. 14), deren Halbmesser $NQ = a$ ist. Wenn $QP = x$, so wird die Fläche

$$QMN = \text{Integral } \tfrac{1}{2}\frac{a^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Es bleibt also nur übrig, das Integral von $a^3dx : 2x\sqrt{x^2-a^2}$ zu bilden. Um dies zu leisten, sei

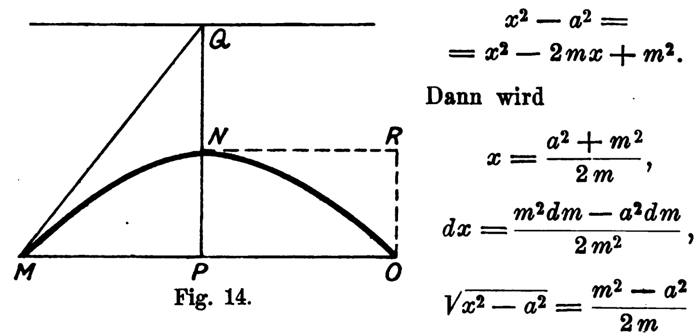


Fig. 14.

$$x^2 - a^2 =$$
$$= x^2 - 2mx + m^2.$$

Dann wird

$$x = \frac{a^2+m^2}{2m},$$

$$dx = \frac{m^2dm - a^2dm}{2m^2},$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \frac{m^2-a^2}{2m}$$

und die ganze Größe

$$\frac{a^3dx}{2x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^3dm}{a^2+m^2}.$$

Wenn man also eine Kurve herstellt, deren Abszisse $= m$, und deren Ordinate $z = a^3 : (a^2+m^2)$, so wird ihre Fläche $=$ dem Integral von $a^3dm : (a^2+m^2)$ oder zdm sein. Um daher diese Fläche zu erhalten, suche man ihr Komplement $NOR =$ Integral von[11])

$$mdz = \frac{(a^2-az)dz}{\sqrt{az-z^2}} = \tfrac{1}{2}\frac{a^2dz}{\sqrt{az-z^2}} + \frac{(\tfrac{1}{2}a^2-az)dz}{\sqrt{az-z^2}}.$$

Das Integral des ersten Bestandteils ist das Vierfache eines Kreissektors, dessen Kreis den Durchmesser a hat, und dessen Abszisse $= z$ ist. Das Integral des zweiten Bestandteils ist aber $\tfrac{1}{2}a\sqrt{az-z^2}$, mithin das Integral von zdm selbst

$$= mz - \text{vierfacher Sektor} - \tfrac{1}{2}a\sqrt{az-z^2}.$$

Es wird daher die konchoidische Fläche gleich einer hyperbolischen, einer geradlinigen und einer Kreisfläche.

NB. Das Integral von $a^3dx : 2x\sqrt{x^2-a^2}$ läßt sich auf andere Weise so erhalten. Es sei $x = a^2 : n$. Dann wird $dx = -a^2dn : n^2$, $\sqrt{x^2-a^2} = a\sqrt{a^2-n^2} : n$ und daher

$$\frac{a^3dx}{2x\sqrt{x^2-a^2}} = -\frac{a^2dn}{2\sqrt{a^2-n^2}}.$$

Das Integral hiervon erhält man, indem man einen Kreisquadranten TRW herstellt (Fig. 15) und $SR = n = a^2 : x$

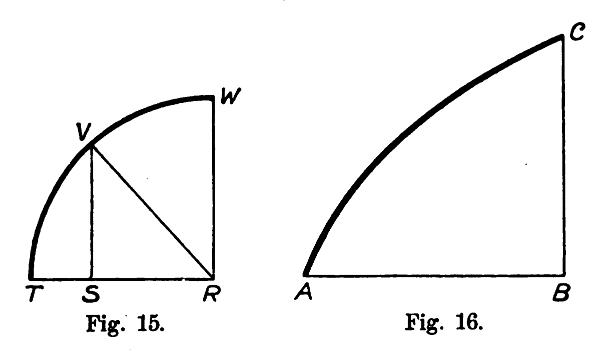


Fig. 15. Fig. 16.

abschneidet. Dann wird, wegen des Zeichens —, der Sektor TRV das Integral der Größe $a^3dx : 2x\sqrt{x^2-a^2}$ und daher die konchoidische Fläche

$=$ der Hyperbelfläche QMN (Fig. 14) $+$ Sektor TRV (Fig. 15).

III. Gegeben ist die Kurve AC (Fig. 16), deren Natur [wenn $AB=x$, $BC=y$ gesetzt wird] $a^5x^2y^2 - x^9 = a^6y^3$ ist. Gesucht wird die Fläche ABC. Es sei $y = x^2 : m$. Dann verwandelt sich die Gleichung in folgende $a^5m - m^3x^3 = a^6$. Daher wird

$$x = \frac{a\sqrt[3]{a^2m-a^3}}{m} \text{ und } y = \frac{a^2\sqrt[3]{(a^2m-a^3)^2}}{m^3},$$

mithin

$$dx = \frac{a^3dm}{3m\sqrt[3]{(a^2m-a^3)^2}} - \frac{adm\sqrt[3]{(a^2m-a^3)}}{m^2}$$

und

$$ydx = \frac{a^5dm}{3m^4} - \frac{(a^5m-a^6)dm}{m^5} = \frac{a^6dm}{m^5} - \frac{2a^5dm}{3m^4}.$$

Die Integrale hiervon, die $-a^6 : 4m^4 + 2a^5 : 9m^3$ lauten, geben die gesuchte Fläche, oder wenn man den Wert $m =$ $= x^2 : y$ einsetzt, so erhält man die Fläche

$$ABC = -\frac{a^6 y^4}{4x^8} + \frac{2a^5 y^3}{9x^6},$$

was verlangt war.

— — — — — — — — — — — — —

Vierte Vorlesung.

Quadratur verschiedener Kurven.

VII. Die Quadratur der krummlinigen Fläche ABC oder ABD zu finden, deren Natur [wenn man $AB = x$, BC oder $BD = y$ setzt] $x^3 + y^3 = axy$ ist. Dies läßt sich auf zweifache Art lösen.

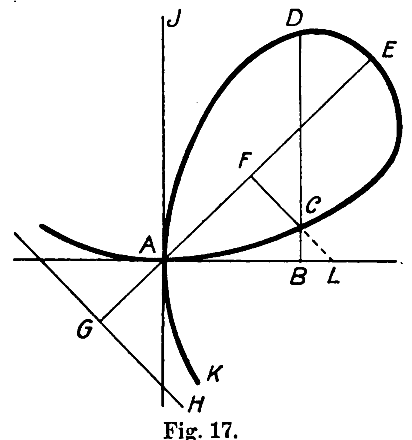


Fig. 17.

Erste Art. Es sei $y = ax^2 : m^2$. Dann reduziert sich die vorgelegte Gleichung auf $m^6 + a^3x^3 = a^2m^4$; mithin ist $x^3 = (a^2m^4 - m^6) : a^3$ und

$$x^2dx = \frac{4a^2m^3dm}{3a^3} - \frac{6m^5dm}{3a^3}.$$

Wenn man dies mit $a : m^2$ multipliziert, ergibt sich

$$ydx = \frac{4a^2mdm}{3a^2} - \frac{6m^3dm}{3a^2}.$$

Das Integral hiervon $(\frac{2}{3}a^2m^2 - \frac{1}{2}m^4) : a^2$ ist daher gleich der gesuchten Fläche, oder wenn man den Wert von m einsetzt, so erhält man

$$\frac{2}{3}\frac{ax^2}{y} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{y^2}.$$

Wenn demnach $x = y = \frac{1}{2}a$ ist, d. h. der Punkt D nach E fällt, so wird die Fläche $ADB = \frac{5}{24}a^2$ sein. Nimmt man hiervon das Dreieck $ABE = \frac{1}{8}a^2$ fort, so bleibt die Fläche $AED = \frac{1}{12}a^3$ übrig oder die ganze Fläche $ACEDA = \frac{1}{6}a^2$.

Auf folgende Weise kann dasselbe Resultat auch anders gefunden werden. Setzt man $y = mx^2 : a^2$, so verwandelt sich

die die Natur [der Fläche] ausdrückende Gleichung in eine andere:

$$a^6 + m^3x^3 = a^5m,$$

und es ist daher $x^3 = (a^5m - a^6) : m^3$ und

$$x^2dx = \frac{-2a^5mdm + 3a^6dm}{3m^4},$$

mithin

$$ydx = \frac{mx^2dx}{a^2} = -\frac{2a^3dm}{3m^2} + \frac{a^4dm}{m^3}.$$

Man bilde nun die Integrale. Dann wird

$$\frac{2a^3}{3m} - \frac{a^4}{2m^2} = \text{der krummlinigen Fläche.}$$

Setzt man den Wert von m ein, so erhält man

$$\frac{2ax^2}{3y} - \frac{x^4}{2y^2} = \text{der Fläche } ABC.$$

Zweite Art. Man verwandle die Gleichung der Kurve in eine andere, in der die Buchstaben die Relation von AF zu FC ausdrücken, wobei die Achse die Halbierende AE des rechten Winkels JAB ist. Es sei also $AF = s$, $FC = t$. Dann wird wegen $CB = BL$, weil

$$\text{Wink. } CLB = \text{Wink. } FAB = 45 \text{ Grad}$$

und daher Dreieck CBL gleichschenklig,

$$s = (x + y)\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ und } t = (x - y)\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Durch die erste Gleichung findet man $x = s\sqrt{2} - y$. Setzt man den Wert in die Gleichung $x^3 + y^3 = axy$ ein, so kommt heraus

$$2s^3\sqrt{2} - 6s^2y + 3sy^2\sqrt{2} - asy\sqrt{2} + ay^2 = 0.$$

Weil aber $t = (x - y)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$ ist, wird

$$y = x - t\sqrt{2} = s\sqrt{2} - y - t\sqrt{2}$$

und daher

$$y = (s - t)\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Nun setze man diesen Wert von y in die gefundene Gleichung ein, d. h.

$$\begin{array}{rcl}
2s^3\sqrt{2} & = & 4s^3\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \\
-6s^2y & = & -6s^3\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 6s^2t\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \\
3sy^2\sqrt{2} & = & 3s^3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 6s^2t\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 3st^2\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \\
-asy\sqrt{2} & = & \quad -as^2 + ast \\
ay^2 & = & \quad \tfrac{1}{2}as^2 - ast + \tfrac{1}{2}at^2 \\
\hline
0 & = & s^3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}as^2 + 3st^2\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}at^2.
\end{array}$$

Es wird also sein

$$t^2 = \frac{as^2 - s^3\sqrt{2}}{3s\sqrt{2} + a}$$

$$t = s\sqrt{\frac{a - s\sqrt{2}}{3s\sqrt{2} + a}}.$$

Jetzt sei $a - s\sqrt{2} = m^2$. Dann wird $s = (a - m^2) : \sqrt{2}$, $ds = -m\,dm\sqrt{2}$, $s\sqrt{a - s\sqrt{2}} = (am - m^3) : \sqrt{2}$, $\sqrt{3s\sqrt{2} + a} = \sqrt{4a - 3m^2}$ und daher

$$tds = \frac{s\sqrt{a - s\sqrt{2}}\,ds}{\sqrt{3s\sqrt{2} + a}} = \frac{(-am^2 + m^4)dm}{\sqrt{4a - 3m^2}}.$$

Das Integral hiervon wird daher

$$= -\tfrac{1}{12}\sqrt{4am^6 - 3m^8} = -\tfrac{1}{12}m^3\sqrt{4a - 3m^2},$$

oder wenn man den Wert von m einsetzt, so erhält man

$$-\tfrac{1}{12}\sqrt{(a - s\sqrt{2})^3}\sqrt{a + 3s\sqrt{2}} =$$

der Fläche AFC oder vielmehr EFC. Setzt man nämlich $AF = s = o$, so daß die Fläche AFC Null wird, so findet man trotzdem für die zu quadrierende Fläche $-\tfrac{1}{12}a^2$. Dies zeigt deutlich, daß die Fläche EFC gemeint ist, wie wir denn auch oben gefunden haben, daß $ECA = \tfrac{1}{12}a^2$ ist. Nebenbei ist hier zu bemerken, daß bei der Annahme $AG = \tfrac{1}{3}AE$, d. h. $s = -\tfrac{1}{3}a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$,

$$t = -\tfrac{1}{3}a\sqrt{\tfrac{4}{3}a} : \sqrt{0a} = \infty$$

wird, d. h. daß GH eine Asymptote der vorliegenden Kurve DAK ist. Beachtenswert ist auch, daß die Fläche ECA gleich der Fläche $KAGH$ ist. Setzt man nämlich $s = -\tfrac{1}{3}a\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so kommt heraus

$$-\tfrac{1}{12}\sqrt{(a-s\sqrt{2})^3}\sqrt{a+3s\sqrt{2}}=0,$$

und es muß daher die positive Fläche ECA der negativen Fläche $KAGH$ gleich sein. Wenn $AF = a\sqrt{\tfrac{1}{6}}$ ist, wird FC die größte der Ordinaten [12]).

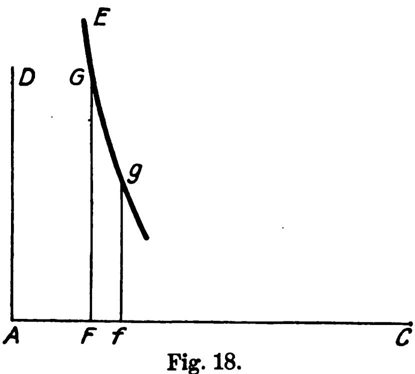


Fig. 18.

VIII. Gegeben ist die Kurve EGg (Fig. 18), $AC = 2a$, $AF = x$, $FG = y$. Die Natur derselben wird durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$y = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\sqrt{2ax - x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.$$

Man sucht die Fläche $DAFGE$. Dies wird so gemacht. Es ist

$$y\,dx = \frac{1}{2}\frac{a^2dx}{\sqrt{2ax - x^2}} - \frac{x^2dx}{\sqrt{4a^2 - x^2}}.$$

Hiervon müssen also die Integrale gefunden werden. Ihre Differenz wird dann die gesuchte Fläche $DAFGE$ liefern. Jene Integrale werden aber auf folgende Weise gefunden.

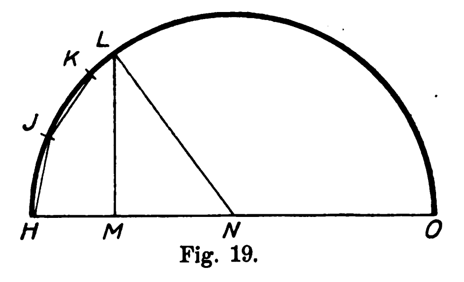


Fig. 19.

Man konstruiere den Halbkreis HLO (Fig. 19), dessen Durchmesser HO gleich der Strecke AC ist, und man mache $HM = AF$. Zieht man die Senkrechte ML, so wird der Sektor HNL gleich dem Integral von $\frac{1}{2}a^2dx : \sqrt{2ax - x^2}$ sein. Trägt man aber HJ und JK gleich HM ab, so werden die beiden Kreissegmente HJ und JK zusammen gleich dem Integral des andern Gliedes $x^2dx : \sqrt{4a^2 - x^2}$ sein, weil nämlich jedes

die Hälfte des Integrals von $x^2dx:\sqrt{4a^2-x^2}$ ist. Daher wird die gesuchte Fläche $DAFGE$ (Fig. 18) gleich dem Sektor LNH sein, vermindert um die beiden Segmente HJ, JK (Fig. 19), d. h. gleich der gemischtlinigen Fläche $LNHJK$ oder, wenn K mit L zusammenfällt, gleich der geradlinigen Fläche $LNHJL$. Daß dies aber möglich ist, liegt auf der Hand. Es kann nämlich das Verhältnis HM zu ML kleiner gewählt werden als jedes Verhältnis, in welchem Falle der Punkt K diesseits von L fallen wird; und wenn man $HM = HN$ nimmt, wird K jenseits von L fallen. Daher muß K irgendeinmal mit L zusammenfallen. Da aber K nur einmal mit L zusammenfällt, so wird unter allen Flächen $DAFGE$ (Fig. 18) nur eine sein, die die Quadratur zuläßt; sonst erhielte man, wenn K nicht nach L fällt, die Quadratur des Segmentes KL. Das läßt sich aber noch nicht und vielleicht niemals machen. Daher hat Herr *Tschirnhaus*[13]) zu Unrecht behauptet, daß die geometrischen Flächen entweder keine Quadratur oder unendlich viele zulassen. Wir haben nämlich bei der vorgelegten Kurve, die eine geometrische ist, gesehen, daß nur eine Fläche quadrierbar ist.

— — — — — — — — — — — — —

Siebente Vorlesung.

Wie ein gefundenes Integral vervollständigt wird.

— — — — — — — — — — — — —

Das wenige, was hier über die Auffindung der Integrale gesagt worden ist, möge genügen. Es ist indessen zu beachten, daß ein vorgelegtes Differential unendlich viele Integrale hat, je nachdem irgendeinem Integral eine konstante Größe hinzugefügt oder davon abgezogen wird. Daher kommt es, daß das Integral, welches man mit Hilfe der Regeln findet, nicht immer der gestellten Forderung genügt, daß man vielmehr zuvor eine gewisse Größe dem gefundenen Integral hinzufügen oder von ihm abziehen muß, um zu dem gewünschten Ziele zu gelangen. Da es aber nicht sogleich bekannt wird, welches jene Größe ist, die addiert oder subtrahiert werden muß, so wird es der Mühe wert sein, eine Regel anzugeben, durch die man dies wissen kann. Es ist die folgende.

Man muß die Fläche, für die man das Integral gefunden hat, gleich Null annehmen. Wenn alsdann das Integral, das

aus dieser Annahme hervorgeht, ebenfalls gleich Null ist, so wird dies ein Zeichen sein, daß bei allen andern Integralen nichts weder zu addieren, noch zu subtrahieren ist. Wenn jedoch auf Grund jener Annahme das Integral noch immer eine positive Größe bleibt, so ist eben diese Größe von allen andern Integralen abzuziehen. Wenn es eine negative Größe bleibt, so muß diese bei den übrigen Integralen hinzugefügt werden.

— — — — — — — — — — — — —

Achte Vorlesung.

Über die umgekehrte Tangentenmethode.

Diese Methode wird so genannt zum Unterschied von der direkten Tangentenmethode, durch die die Tangenten aller Kurven ohne Unterschied bestimmt werden, und die bereits in der Differentialrechnung entwickelt worden ist; man braucht nämlich dazu keine Integralrechnung. Die umgekehrte Tangentenmethode ist aber die, durch welche man aus gegebenen Eigenschaften von Tangenten oder von krummlinigen Flächen oder Kurven die Natur dieser findet. Wie nun die Differentiale aller Integrale, nicht aber die Integrale aller Differentiale erhalten werden können, so lassen sich zwar von allen gegebenen Kurven die Tangenten sehr leicht bestimmen, aber umgekehrt läßt sich nicht ebenso leicht, ja sogar manchmal überhaupt nicht, aus den Tangenten die Natur der Kurve herausfinden. Da bei der Methode, die Integrale zu bilden, bestimmte Regeln nicht angegeben werden können, durch die man zu allen Differentialen die Integrale fände, sondern nur diejenigen auseinandergesetzt werden, die in sehr vielen, und zwar in unzähligen Fällen angebracht sind, so ließe sich also auch bei der umgekehrten Tangentenmethode eine allgemeine Regel niemals geben. Daher kommt es, daß man verschiedene Regeln bilden muß, je nachdem die Natur der Sache es verlangt. Man kann sogar sagen, daß fast jedes Beispiel seine eigene Regel hat, deren geeignete Fassung von dem Scharfsinn dessen abhängt, der die Lösung des Problems unternimmt. Es ist also ebenso unnötig wie unmöglich, bestimmte Regeln vorzuschreiben.

Daher werden wir die Art, solche Probleme zu behandeln,

die Hälfte des Integrals von $x^2 dx : \sqrt{4a^2 - x^2}$ ist. Daher wird die gesuchte Fläche $DAFGE$ (Fig. 18) gleich dem Sektor LNH sein, vermindert um die beiden Segmente HJ, JK (Fig. 19), d. h. gleich der gemischtlinigen Fläche $LNHJK$ oder, wenn K mit L zusammenfällt, gleich der geradlinigen Fläche $LNHJL$. Daß dies aber möglich ist, liegt auf der Hand. Es kann nämlich das Verhältnis HM zu ML kleiner gewählt werden als jedes Verhältnis, in welchem Falle der Punkt K diesseits von L fallen wird; und wenn man $HM = HN$ nimmt, wird K jenseits von L fallen. Daher muß K irgendeinmal mit L zusammenfallen. Da aber K nur einmal mit L zusammenfällt, so wird unter allen Flächen $DAFGE$ (Fig. 18) nur eine sein, die die Quadratur zuläßt; sonst erhielte man, wenn K nicht nach L fällt, die Quadratur des Segmentes KL. Das läßt sich aber noch nicht und vielleicht niemals machen. Daher hat Herr *Tschirnhaus*[13]) zu Unrecht behauptet, daß die geometrischen Flächen entweder keine Quadratur oder unendlich viele zulassen. Wir haben nämlich bei der vorgelegten Kurve, die eine geometrische ist, gesehen, daß nur eine Fläche quadrierbar ist.

— — — — — — — — — — — — —

Siebente Vorlesung.

Wie ein gefundenes Intégral vervollständigt wird.

— — — — — — — — — — — — —

Das wenige, was hier über die Auffindung der Integrale gesagt worden ist, möge genügen. Es ist indessen zu beachten, daß ein vorgelegtes Differential unendlich viele Integrale hat, je nachdem irgendeinem Integral eine konstante Größe hinzugefügt oder davon abgezogen wird. Daher kommt es, daß das Integral, welches man mit Hilfe der Regeln findet, nicht immer der gestellten Forderung genügt, daß man vielmehr zuvor eine gewisse Größe dem gefundenen Integral hinzufügen oder von ihm abziehen muß, um zu dem gewünschten Ziele zu gelangen. Da es aber nicht sogleich bekannt wird, welches jene Größe ist, die addiert oder subtrahiert werden muß, so wird es der Mühe wert sein, eine Regel anzugeben, durch die man dies wissen kann. Es ist die folgende.

Man muß die Fläche, für die man das Integral gefunden hat, gleich Null annehmen. Wenn alsdann das Integral, das

aus dieser Annahme hervorgeht, ebenfalls gleich Null ist, so wird dies ein Zeichen sein, daß bei allen andern Integralen nichts weder zu addieren, noch zu subtrahieren ist. Wenn jedoch auf Grund jener Annahme das Integral noch immer eine positive Größe bleibt, so ist eben diese Größe von allen andern Integralen abzuziehen. Wenn es eine negative Größe bleibt, so muß diese bei den übrigen Integralen hinzugefügt werden.

— — — — — — — — — — — — —

Achte Vorlesung.

Über die umgekehrte Tangentenmethode.

Diese Methode wird so genannt zum Unterschied von der direkten Tangentenmethode, durch die die Tangenten aller Kurven ohne Unterschied bestimmt werden, und die bereits in der Differentialrechnung entwickelt worden ist; man braucht nämlich dazu keine Integralrechnung. Die umgekehrte Tangentenmethode ist aber die, durch welche man aus gegebenen Eigenschaften von Tangenten oder von krummlinigen Flächen oder Kurven die Natur dieser findet. Wie nun die Differentiale aller Integrale, nicht aber die Integrale aller Differentiale erhalten werden können, so lassen sich zwar von allen gegebenen Kurven die Tangenten sehr leicht bestimmen, aber umgekehrt läßt sich nicht ebenso leicht, ja sogar manchmal überhaupt nicht, aus den Tangenten die Natur der Kurve herausfinden. Da bei der Methode, die Integrale zu bilden, bestimmte Regeln nicht angegeben werden können, durch die man zu allen Differentialen die Integrale fände, sondern nur diejenigen auseinandergesetzt werden, die in sehr vielen, und zwar in unzähligen Fällen angebracht sind, so ließe sich also auch bei der umgekehrten Tangentenmethode eine allgemeine Regel niemals geben. Daher kommt es, daß man verschiedene Regeln bilden muß, je nachdem die Natur der Sache es verlangt. Man kann sogar sagen, daß fast jedes Beispiel seine eigene Regel hat, deren geeignete Fassung von dem Scharfsinn dessen abhängt, der die Lösung des Problems unternimmt. Es ist also ebenso unnötig wie unmöglich, bestimmte Regeln vorzuschreiben.

Daher werden wir die Art, solche Probleme zu behandeln,

nur durch Beispiele klar machen, bei denen allen jedoch folgendes hauptsächlich zu beachten ist:

1. Man muß aus den gemachten Angaben die Gleichung zu gewinnen suchen, die in dx und dy besteht.

2. Man muß, wenn es möglich ist, alle Größen, in denen y und dy vorkommen, auf eine Seite, alle, in denen x und dx vorkommen, auf die andere Seite schaffen.

3. Von den so reduzierten Größen ist, wenn möglich, das Integral zu nehmen. Dieses wird die Natur der Kurve anzeigen.

Dies vorausgeschickt, werden die folgenden Beispiele so aufgelöst:

I. Man fragt, welche Kurve AB das sein mag, deren Or-

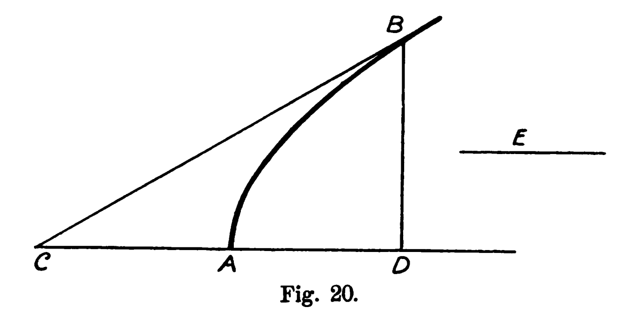


Fig. 20.

dinate BD immer die mittlere Proportionale zwischen einer gegebenen Größe E und der Subtangente CD ist.

Es sei

$$E = a,\ AD = x,\ DB = y.$$

Dann wird nach Voraussetzung $CD = y^2 : a$ sein. Es ist aber

$$dy : dx = y : \left(CD = \frac{y^2}{a}\right).$$

Man erhält also folgende Gleichung

$$y\,dx = \frac{y^2\,dy}{a} \text{ oder } a\,dx = y\,dy,$$

und wenn man auf beiden Seiten die Integrale nimmt, erhält man

$$ax = \tfrac{1}{2}y^2 \text{ oder } 2ax = y^2.$$

Dies zeigt, daß die gesuchte Kurve AB eine Parabel mit dem Parameter $2a$ ist[14]).

II. Wenn jetzt die Ordinate BD die mittlere Proportionale ist zwischen der Subtangente DC und der gegebenen Größe E, vermindert um die Abszisse AD, so wird die Natur der Kurve AB in folgender Weise gefunden.

Da nach Voraussetzung

$$(E - AD) : BD = BD : DC$$

ist, so wird sein

$$DC = y^2 : (a - x).$$

Es ist aber

$$dy : dx = y : \left(DC = \frac{y^2}{a - x}\right).$$

Also wird sein

$$y\,dx = \frac{y^2 dy}{a - x}$$

und, wenn man die Gleichung reduziert,

$$a\,dx - x\,dx = y\,dy,$$

ferner nach Bildung der Integrale

$$ax - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2 \text{ oder } 2ax - x^2 = y^2.$$

Hieraus geht hervor, daß die Kurve AB ein Kreis ist, dessen Durchmesser dem doppelten E gleichkommt.

III. Es wird die Natur der Kurve gesucht, die folgende Eigenschaft besitzt. Das Quadrat der Ordinate BC ist überall die mittlere Proportionale zwischen dem Quadrat der gegebenen Größe E und der krummlinigen Fläche ABC.

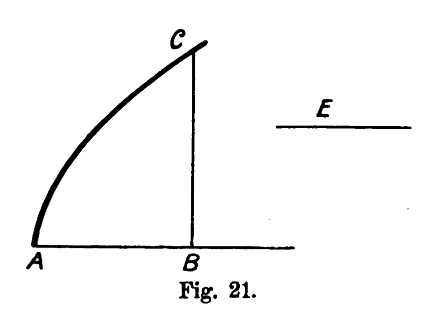


Fig. 21.

Es sei

$$AB = x, \quad BC = y, \quad E = a.$$

Nach Voraussetzung ist also

$$\text{die Fläche } ABC = y^4 : a^2,$$

mithin ihr Differential

$$\frac{4y^3dy}{a^2} = ydx.$$

Nach Reduktion der Gleichung wird

$$4y^2dy = a^2dx.$$

Wenn man hiervon die Integrale nimmt, so erhält man

$$\tfrac{4}{3}y^3 = a^2x \text{ oder } y^3 = \tfrac{3}{4}a^2x.$$

Daher ist die gesuchte Kurve eine kubische Parabel erster Art[15]) mit dem Parameter $a\sqrt{\tfrac{3}{4}}$.

Neunte Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

Auf diese Weise findet man die Natur aller Kurven aus gegebenen Eigenschaften der Tangenten oder der Flächen. Es kommen aber manchmal Fälle vor, wo die Integrale, nachdem die Gleichung auf der einen Seite auf x und dx und auf der andern Seite auf y und dy reduziert ist, entweder unendlich sind oder sich überhaupt nicht bilden lassen, während nichtsdestoweniger die gesuchte Kurve eine geometrische sein mag, so daß man also nichts schließen kann. Bei diesen und andern solchen Gelegenheiten muß man daher auf andere Hilfsmittel zurückgreifen. Eines davon wird sein, daß man die Integrale aus Größen sucht, in denen x, y, dx und dy gemischt auftreten. Ein anderes Hilfsmittel aber ist, daß zwar die mit x und dx behafteten Größen von den mit y und dy behafteten getrennt sind, daß man aber, wenn die Integrale aus ihnen sich nicht nehmen lassen, zwei Flächen bildet, von denen die Natur der einen durch die mit x behafteten, die der andern durch die mit y behafteten ausgedrückt wird. Läßt sich dann eine Beziehung zwischen jenen beiden Flächen finden, d. h. läßt sich ein Teil der einen erhalten, der einem Teil der andern gleich ist, so ist dies ein Zeichen, daß die gesuchte Kurve eine geometrische ist, und ihre Natur gefunden werden kann. Wenn sich dagegen die eine Fläche der andern nicht gleichmachen läßt, so wird die gesuchte Kurve zur Klasse der mechanischen[16]) gehören.

Bevor das erste Verfahren auseinandergesetzt wird, nämlich die Integrale von Größen zu bilden, die aus beiden Arten von Unbestimmten gemischt sind, müssen wir zuerst die Entstehung

solcher Differentiale betrachten, damit man um so besser in umgekehrtem Sinne zur Kenntnis der Integrale gelangt und sich davon eine allgemeine Idee bildet, die zur Natur der gesuchten Kurve führt. Es ist aus der Differentialrechnung bekannt, daß die Größen, die wie wir hier angeben werden, die nebenstehenden Differentiale haben*), z. B.

die Größe $y : x$	das Differential	$(xdy - ydx) : x^2$,
„ „ $y^2 : x$	„ „	$(2xydy - y^2dx) : x^2$,
„ „ $y^3 : x$	„ „	$(3xy^2dy - y^3dx) : x^2$,
. . . .	. . . . . .	. . . .
die Größe $y^a : x$	das Differential	$(axy^{a-1}dy - y^a dx) : x^2$.

Hieraus folgt umgekehrt, daß man, wenn ein Differential $axdy - ydx$ gleich Null ist, zur Auffindung seines Integrals mit $y^{a-1} : x^2$ multiplizieren muß. Dann wird nämlich die entstehende Größe auch gleich Null sein, d. h.

$$axdy - ydx = 0 = (axdy - ydx)\,\frac{y^{\;-1}}{x^2}.$$

Das Integral hiervon, welches nach der Bildungsweise $y^a : x$ ist, muß daher gleich irgendeiner konstanten Größe sein, weil das Differential gleich Null ist. Das wird also das Integral von

$$axdy - ydx = 0$$

sein, d. h.

$$\frac{y^a}{x} = \text{einer konstanten Größe } b.$$

Nach diesen Vorbereitungen werden die nachstehenden Probleme auf folgende Weise leicht gelöst.

I. Man fragt, welche Kurve AB das sein mag, deren Subtangente CD der doppelten Abszisse AC gleich ist. Es sei $AC = x$, $BC = y$. Dann wird nach Voraussetzung

$$2x : y = dx : dy$$

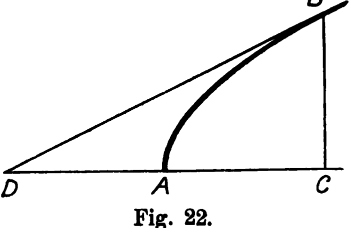


Fig. 22.

*) Allgemein gilt folgende Bemerkung. So oft man mehrere Differentiale hat, die durch ihre zugehörigen Integrale dividiert und zusammen gleich Null sind, wird das Produkt aller Integrale, jedes zu der Potenz erhoben, die seinem Koeffizienten gleich ist, gleich einer konstanten Größe sein. Es sei z. B. $adx : x + bdy : y + cdz : z +$ usw. $= 0$. Dann, behaupte ich, wird $x^a y^b z^c$ usw. = irgendeiner konstanten Größe sein.

sein und daher

$$ydx = 2xdy.$$

Wenn wir dies nach der ersten Regel finden wollten, so wäre die Gleichung auf folgende zu reduzieren

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dy}{y}.$$

Da aber das Integral von beiden gleich Unendlich ist[17]), so erhält man hieraus die Natur der Kurve nicht. Daher muß das Problem nach diesem zweiten Verfahren gelöst werden: $ydx = 2xdy$, also

$$2xdy - ydx = 0 = (2xdy - ydx)\frac{y}{x^2}.$$

Das Integral hiervon, das nach dem Obigen gleich $y^2 : x$ ist, muß irgend einer Größe gleichgesetzt werden. Es sei also $y^2 : x = b$. Dann hat man

$$y^2 = bx.$$

Hieraus folgt, daß die gesuchte Kurve AB eine Parabel ist, deren Parameter einer beliebig gewählten Größe b gleichkommt.

II. Es sei jetzt die Subtangente $DC = 3AC$. Dann wird nach Voraussetzung

$$3x : y = dx : dy$$

sein, mithin

$$ydx = 3xdy$$

und

$$3xdy - ydx = 0 = (3xdy - ydx)\frac{y^2}{x^2}.$$

Das Integral hiervon ist aber nach dem Obigen $y^3 : x$. Es wird also sein $y^3 : x = b^2$ oder

$$y^3 = b^2x.$$

Das ist die Gleichung einer kubischen Parabel erster Art, deren Parameter gleich b.

III. Es sei allgemein $DC = a \cdot AC$. Dann wird sein

$$ax : y = dx : dy,$$

mithin

$$ydx = axdy$$

und

$$axdy - ydx = 0 = (axdy - ydx)\,\frac{y^{a-1}}{x^2}.$$

Das Integral hiervon ist $y^a : x$ und daher $y^a : x = b^{a-1}$ oder

$$y^a = b^{a-1}x,$$

was eine Kurve aus der Gattung der parabolischen bedeutet.

IV. Es ist die Natur der Kurve AB zu bestimmen, die so beschaffen ist, daß die Fläche $ACB = s$ immer ein Drittel des umbeschriebenen Rechtecks $ADBC$ ist. Nach Voraussetzung ist

$$3s = xy,$$

mithin

$$3ds, \text{ d. h. } 3ydx = xdy + ydx$$

und

$$2ydx - xdy = 0 = (2ydx - xdy)\,\frac{x}{y^2}.$$

Fig. 23.

Das Integral hiervon, das $x^2 : y$ lautet, wird also gleich b zu setzen sein oder

$$x^2 = by.$$

Dies zeigt uns, daß die Kurve wieder eine Parabel ist.

Es kommt manchmal vor, daß die sich ergebende Gleichung in x, y, dx und dy nicht bloß aus zwei Gliedern besteht, wie in den bisher beigebrachten Beispielen. Man muß sie daher durch eine Umänderung und Ersetzung der Buchstaben, wenn es möglich ist, auf eine zweigliedrige Gleichung reduzieren. Wenn man mit dieser in der gewohnten Weise verfährt, wird man zu der Gleichung gelangen, die die Natur der Kurve ausdrückt. In ihr sind die umgeänderten Buchstaben wieder einzusetzen.

V. AB (Fig. 24) ist die gesuchte Kurve, $AC = x$, $CB = y$, $E =$ einer Konstanten a. Die Subtangente DC ist überall gleich $(2ax + x^2) : (a + x)$. Man soll die Natur der Kurve ermitteln. Nach Voraussetzung ist

$$\frac{2ax + x^2}{a + x} : y = dx : dy,$$

mithin

$$ydx = \frac{2axdy + x^2dy}{a + x}.$$

und

$$2axdy + x^2dy = aydx + xydx.$$

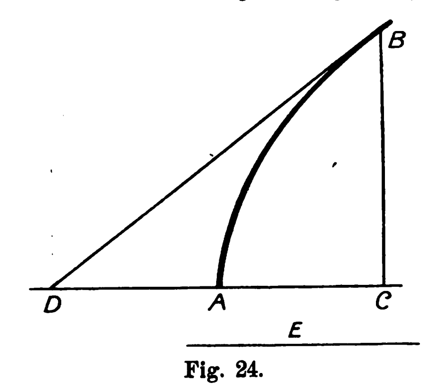


Fig. 24.

Man setze jetzt

$$2ax + x^2 = z^2.$$

Dann wird wegen dieser Einsetzung

$$adx + xdx = zdz$$

sein. Setzt man also in der gefundenen Gleichung beiderseits den Wert von x und dx ein, so verwandelt sie sich in folgende:

$$zdy = ydz,$$

also

$$zdy - ydz = 0 = (zdy - ydz)\frac{1}{z^2}.$$

Davon lautet das Integral $y : z$, was also gleich $a : b$ gesetzt wird oder

$$by = az \text{ und } b^2y^2 = a^2z^2.$$

Wenn man den Wert $z^2 = 2ax + x^2$ wieder einsetzt, findet man

$$b^2y^2 = 2a^3x + a^2x^2,$$

die Gleichung für die Hyperbel.

Zehnte Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

Bisher haben wir solche Beispiele angeführt, bei denen die Gleichung auf Null zu reduzieren und dann nach dem angegebenen Verfahren das Integral aus ihr zu nehmen ist, welches die Natur der Kurven gezeigt hat. Jetzt werden wir einige angeben, bei denen sich das Integral nicht finden ließe, wenn man die Gleichung auf Null reduzierte. Daher muß man die

Gleichung so auf beide Seiten verteilen, daß sich von beiden zugleich das Integral erhalten läßt, was ebenfalls die Natur der Kurve erkennen läßt.

VI. Man soll finden, wie beschaffen die Kurve AC sein muß, damit $E^2 : BC^2 = BC : DA$ ist.

Es sei $AB = x$, $BC = y$, $E = a$. Nach Voraussetzung ist

$$DA = y^3 : a^2,$$

mithin

$$DB = \frac{y^3 + a^2 x}{a^2}.$$

Fig. 25.

Es ist aber

$$dx : dy = DB : BC = \frac{y^3 + a^2 x}{a^2} : y,$$

folglich

$$\frac{y^3 dy + a^2 x dy}{a^2} = y dx$$

und

$$y^3 dy + a^2 x dy = a^2 y dx$$

oder

$$y^3 dy = a^2 y dx - a^2 x dy.$$

Damit sich nun auf beiden Seiten das Integral bilden läßt, teile ich beides durch y^2. Dann ergibt sich

$$y dy = (a^2 y dx - a^2 x dy) : y^2,$$

wovon die Integrale lauten

$$\frac{1}{2} y^2 = \frac{a^2 x}{y} \text{ oder } y^3 = 2a^2 x.$$

Daher ist die vorliegende Kurve eine kubische Parabel erster Art, deren Parameter gleich $a\sqrt{2}$.

VII. Die Natur der Kurve AC zu finden, die so beschaffen ist, daß die Subtangente

$$BD = \frac{2axy - 3x^3}{ay + 3x^2}.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\frac{2axy - 3x^3}{ay + 3x^2} : y = dx : dy.$$

Man findet durch Reduktion der Gleichung

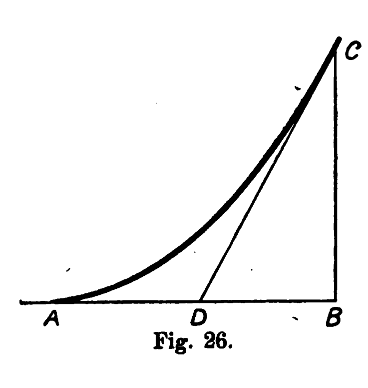


Fig. 26.

$$3x^2ydx + 3x^3dy =$$
$$= 2axydy - ay^2dx.$$

Durch Division mit x^2 erhält man

$$3ydx + 3xdy =$$
$$(2axydy - ay^2dx) : x^2.$$

Nimmt man die Integrale, so wird sein

$$3xy = \frac{ay^2}{x}$$

oder $3x^2 = ay$,

was eine Parabel anzeigt.

Wir müssen jetzt ein anderes Verfahren darlegen, das, so oft die Gleichung sich so anordnen läßt, daß x und dx von den Buchstaben y und dy getrennt sind, ganz allgemein ist, sowohl für mechanische als für geometrische Kurven. Dieses Verfahren besteht aber darin, daß die mit dx behafteten Größen, wenn sie linear sind, zur zweiten Dimension erhoben und, wenn sie kubisch oder von höherer Dimension sind, zu jener herabgedrückt werden; in derselben Weise muß man es mit den Größen machen, die mit dy behaftet sind. Jene Erhebung oder Herabdrückung geschieht aber durch Multiplikation oder Division mit einer gewissen konstanten Größe a, a^2, a^3 usw. und nicht mit irgend einer Unbestimmten. Sonst würde die Sache nicht gehen. Die Differentiale dieser flächenhaften Größen werden daher Linien sein, die mit dx und dy multipliziert sind und dann wegen der so gefundenen Gleichung einander gleich sein müssen. Wenn man also jene Linien an ihre zugehörigen dx und dy als Ordinaten ansetzt, so werden dadurch zwei Kurven gebildet, deren Flächen gleich sein werden, weil deren Differentiale gleich sind. Nimmt man daher zu einem Teil der einen Fläche, die über y gebildet ist, einen gleichen Teil der andern Fläche, die über x liegt, und verlängert die Enden

jener Teile, so wird der gemeinsame Schnitt ein Punkt auf der gesuchten Kurve sein.

— — — — — — — — — — — — —

I. Nehmen wir ein schon oben angeführtes Beispiel wieder vor, nämlich folgendes. Es wird die Natur der Kurve AC gesucht, bei der die Subtangente $DB = 2AB$ ist.

Es sei $AB = x$, $BC = y$. Nach Voraussetzung wird sein

$$\frac{2x}{y} = \frac{dx}{dy},$$

mithin

$$\frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

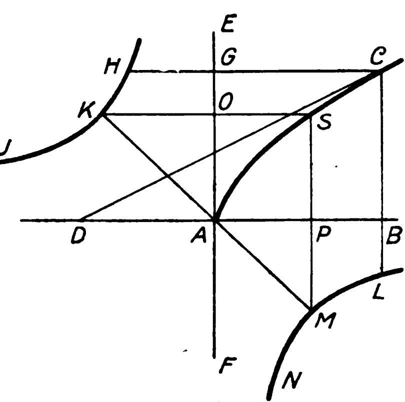


Fig. 27.

Hiervon lassen sich aber die Integrale nicht finden, oder sie sind vielmehr unendlich[18]). Ich multipliziere daher, damit die zweite Dimension hineinkommt, die Differentiale mit a^2. Dann wird sich also ergeben

$$\frac{2a^2dy}{y} = \frac{a^2dx}{x}.$$

Um hierdurch die Natur der gesuchten Kurve AC zu finden, verlängere man BA und ziehe durch A die Senkrechte EF, so daß die Unbegrenzte AE alle Ordinaten BC darstellt, d. h. AG ist gleich BC. Man errichte nun im Punkte G die Senkrechte $GH = 2a^2 : y$ und mache dasselbe in allen andern Punkten; dadurch wird dann eine hyperbolische Kurve JKH erzeugt werden, deren Asymptoten AD, AG sind, und deren Halbachse $AK = 2a$ ist. Ebenso hat man in B die Senkrechte $BL = a^2 : x$ zu ziehen und dasselbe in allen andern Punkten zu machen; die dadurch entstehende Kurve NML wird ebenfalls eine Hyperbel sein, deren Asymptoten AF, AB sind, und deren Halbachse $AM = a\sqrt{2}$ ist. Weil nun

$\frac{2a^2dy}{y}$, d. h. das Differential der Hyperbelfläche JKH

gleich ist

$\frac{a^2dx}{x}$, d. h. dem Differential der Hyperbelfläche NML,

so werden auch

alle Differentiale, d. h. die Hyperbelfläche KG

gleich sein

allen Differentialen, d. h. der Fläche MB.

Es bleibt daher zur Bestimmung der Natur der Kurve AC nur übrig, zu der Hyperbelfläche KG die andere MB zu wählen, die ihr gleich ist. Dann wird nämlich bei Verlängerung von LB, HG der Treffpunkt C auf der gesuchten Kurve liegen. — — — Es läßt sich aber zu einer gegebenen Hyperbelfläche, die zwischen Asymptote und Ordinaten enthalten ist, eine andere ihr gleiche finden, und zwar muß man im vorliegenden Falle — — — —

$$\frac{AO^2}{AG^2} = \frac{AP}{AB}$$

machen. Dann wird

die Fläche KG = der Fläche MB

sein[19]). Weil aber

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AO^2}{AG^2} = \frac{PS^2}{BC^2},$$

ist die Kurve ASC offenbar eine Parabel.

Auf dieselbe Weise findet man, wenn $DB = 3AB$ ist, daß

$$\frac{PS^3}{BC^3} = \frac{AP}{AB},$$

mithin ASC eine kubische Parabel ist. In gleicher Weise findet man bei jeder Festsetzung des Verhältnisses von DB zu AB immer die Natur der Kurve ASC.

II. Man sucht die Natur der Kurve BDC, deren Subtangente immer gleich der Konstanten a ist. Nach Voraussetzung ist

$$dy : dx = y : a,$$

mithin

$$ydx = ady \text{ und } dx = \frac{ady}{y}.$$

Multipliziert man beiderseits mit a, so erhält man

$$a\,dx = \frac{a^2 dy}{y}.$$

Um also die Kurve zu konstruieren, ziehe man unbegrenzt die Normalen BJ, LH und bei allen AB, AN, AO usw., die den y gleich sind, setze man KB, NE, OF usw. gleich $a^2:y$ an; dann entsteht die Hyperbel KEF, deren Asymptoten AO, AL sind; ferner setze man bei AG, AH usw. GP, HQ usw. gleich a an; dann wird JPQ eine Gerade parallel zu AH. Nimmt man daher die Hyperbelfläche KN gleich dem Rechteck AP und KO gleich AQ, so werden die Treffpunkte D, C usw. auf der gesuchten Kurve liegen. Wenn also AG, AH usw. arithmetische Proportionalen sind, so werden AB, AN, AO usw. geometrische Proportionalen sein, weil die Flächen KN, EO usw. gleich sein müssen. Daher ist die Kurve BDC eine logarithmische [20]).

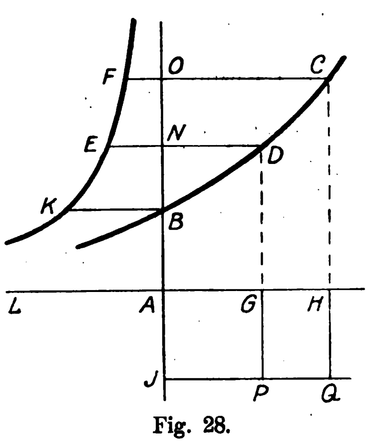


Fig. 28.

Elfte Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

Die Probleme, die wir bisher vorgebracht haben, wurden gelöst durch Ausziehung von Integralen aus den zu Anfang eingeführten Buchstaben selbst. Jetzt folgen einige, bei denen man, bevor die Integrale genommen werden können, eine Substitution der Buchstaben anwenden muß, und zwar eine solche, die sich dem betreffenden Problem anpaßt; denn eine bestimmte Regel läßt sich hierfür nicht angeben. Man hat jedoch gewisse allgemeine Regeln für die Trennung der Unbestimmten mittels einer Substitution.

So lassen sich alle Differentialgleichungen, wo kein konstanter Buchstabe zur Vervollständigung der Homogeneität auf-

tritt[21]), auf andere, separierbare reduzieren, indem man für x einsetzt zy, für dx also $zdy + ydz$ oder umgekehrt für y einsetzt zx, für dy also $zdx + xdz$.

Ebenso lassen sich alle Differentialgleichungen, wo die Unbestimmten x und y die erste Dimension nicht überschreiten[22]), auf separierbare reduzieren, indem man alle Größen, mit denen dx behaftet ist, gleich z setzt. Nachdem diese Einsetzung geschehen ist, muß man noch alles, womit dy behaftet ist, einem andern Buchstaben t gleichsetzen, bis man endlich zu einer Gleichung gelangt, in der man keinen konstanten Buchstaben findet, die also wieder eine homogene ist. Diese letzte Gleichung wird schließlich in der vorhin angegebenen Weise in eine separierbare verwandelt.

Dasselbe kann man erreichen, indem man

$$x = z + \text{einer unbekannten Konstanten}$$

und

$$y = t + \text{einer andern unbekannten Konstanten}$$

setzt und nach Einführung dieser Werte in die Gleichung die Glieder, in denen sich die Bekannten finden, beidemal gleich Null setzt. Auf diese Weise erkennt man nämlich, was für die unbekannten Konstanten zu nehmen ist, damit jene Glieder in der Gleichung verschwinden, und eine Gleichung zum Vorschein kommt, die nur aus homogenen Unbestimmten besteht, die also wie oben gelöst werden kann.

Hauptsächlich muß man aber zu erreichen suchen, daß durch diese Substitution die Dimensionen der Buchstaben vermindert werden, oder daß mit ihrer Hilfe die Unbestimmten mit den gleichartigen Differentialen abgesondert werden und für sich auf die andere Seite gesetzt werden können.

Das erste Beispiel, das wir geben, zeigt eine Substitution die die Dimensionen der Buchstaben vermindert. Das folgende aber zeigt die Trennung der Unbestimmten durch eine Substitution.

I. Man sucht die Natur der Kurve, bei welcher, wenn man die Abszisse $= x$, die Ordinate $= y$ setzt, die Subtangente $= (3x^3 - 2axy) : (3x^2 - ay)$ ist.

Lösung. Nach Voraussetzung ist

$$dx : dy = \frac{3x^3 - 2axy}{3x^2 - ay} : y,$$

mithin

$$3x^3dy - 2axydy = 3x^2ydx - ay^2dx.$$

Um die Dimensionen herabzudrücken, setze man

$$y = mx.$$

Dann wird sein

$$dy = mdx + xdm.$$

In der gefundenen Gleichung führe man den Wert von y und dy ein. Dann erhält man nach gehöriger Vereinfachung

$$3x^2dm - 2amxdm = am^2dx.$$

Jetzt setze man

$$x = mn.$$

Dann wird sein

$$dx = mdn + ndm.$$

Führt man dann in der letzten Gleichung den Wert von x und dx ein, so kommt heraus:

$$3n^2dm - 3andm = amdn.$$

Es sei

$$n = \frac{a^2}{r}.$$

Dann wird

$$dn = -\frac{a^2dr}{r^2}.$$

Die gefundene Gleichung reduziert sich also auf folgende:

$$3adm - 3rdm = -mdr.$$

Es sei

$$r - a = t.$$

Dann wird $dr = dt$, und man erhält diese Gleichung:

$$3tdm = mdt \text{ oder } 3tdm - mdt = 0 = (3tdm - mdt)\frac{m^2}{t^2}$$

[damit man nach dem oben erklärten Verfahren das Integral nehmen kann].

Das Integral hiervon, das $m^3 : t$ lautet, wird gleich einer konstanten Größe b sein, mithin

$$m^3 = bt.$$

Dies ist nun die Gleichung, die die Natur der Kurve ausdrückt.

Um sie aber in den Buchstaben x und y zu haben, muß man in umgekehrter Reihenfolge für einen Buchstaben nach dem andern seinen Wert einsetzen, bis man schließlich zu einer Gleichung gelangt, in der nur x und y auftreten. Diese Einsetzung vollzieht sich aber in folgender Weise:

$$m^3 = bt = (\text{wegen } t = r - a)\, br - ba = \left(\text{wegen } r = \frac{a^2}{n}\right)\frac{a^2b}{n} - ba$$
$$= \left(\text{wegen } n = \frac{x}{m}\right)\frac{a^2bm}{x} - ba.$$

Daher hat man

$$m^3x = a^2bm - bax.$$

Weil aber $m = y : x$ ist, verwandelt sich die gefundene Gleichung in folgende:

$$\frac{y^3}{x^2} = \frac{a^2by}{x} - bax$$

oder nach Vereinfachung

$$y^3 + bax^3 = a^2byx.$$

Damit die Gleichung überall gleiche Dimensionen hat, sei der konstante und beliebig angenommene Buchstabe[23]) $b = 1 : a$. Dann kommt heraus

$$y^3 + x^3 = ayx.$$

Diese Gleichung drückt die Natur jener Kurve aus, von der wir oben [Seite 24] die Quadratur gefunden haben.

II. Das zweite Beispiel, das wir hier geben, wurde Herrn *Descartes* von Herrn *de Beaune* vorgelegt. Die Lösung kommt in *Descartes*' Werken nicht vor. Er sagt aber in dem Briefwechsel*, daß er sie gefunden habe. Es wird uns daher nicht reuen, die Lösung, nach unserer Methode, hierher zu setzen, zumal es beim ersten Anblick so scheint, als ließe sich das Problem nach dieser Methode (wegen der Untrennbarkeit der Unbestimmten) unmöglich lösen. Man wird aber sehen, daß sich die Unbestimmten nach einer ganz geringfügigen Substitution leicht voneinander trennen lassen, und deshalb das Problem vollständig gelöst werden kann, jedoch unter Voraussetzung der Quadratur der Hyperbel. Denn die hier gesuchte Kurve ist eine mechanische.

Das vorgelegte Problem ist aber folgendes:

---

*) Bd. III, Brief 71.

Die Gerade AC bildet einen halben rechten Winkel mit der Achse AD und E ist eine gegebene konstante Strecke. Man sucht die Natur der Kurve AB, bei der sich die Ordinate BD zur Subtangente FD verhält wie die gegebene Strecke E zu BC.

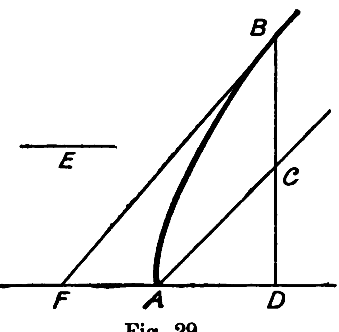


Fig. 29.

Lösung. Es sei $AD = x$, $DB = y$, $E = a$. Dann wird nach Voraussetzung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y - x}$$

sein, mithin

$$adx = ydy - xdy.$$

Aus dieser Gleichung müßte man also die Natur der Kurve finden, entweder, indem man die Integrale nimmt oder indem man y mit dy auf die eine, x mit dx aber auf die andere Seite bringt, damit sich alsdann zwei Flächen bilden lassen, durch deren Vergleichung man zu der Natur der Kurve gelangt. Da aber aus der gefundenen Gleichung sich weder die Integrale bilden lassen, noch x und dx von y und dy getrennt werden können, so muß man die Gleichung in eine andere verwandeln, indem man den Wert einer der beiden Unbestimmten ersetzt. Es sei also

$$y - x = z,$$

dann wird

$$y = z + x \text{ und } dy = dz + dx.$$

Die gefundene Gleichung verwandelt sich daher in folgende:

$$adx = zdz + zdx \text{ oder } adx - zdx = zdz.$$

und

$$dx = \frac{zdz}{a - z}.$$

Auf diese Weise haben wir also die beiden Unbestimmten getrennt. Man multipliziere nun, um die Kurve zu konstruieren, beiderseits mit a. Dann wird

$$adx = \frac{azdz}{a - z}.$$

Nachdem man ferner die Normalen GT, NH gezogen hat (Fig. 30), nehme man $GN = GH = a$ und ziehe durch die Punkte H, N zu GT die Parallelen HV, MR. Dann

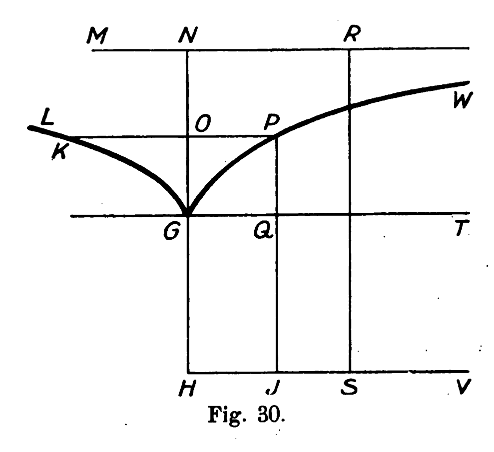


Fig. 30.

mache man $NR = NG$, zeichne die Senkrechte RS und konstruiere zu den Asymptoten RM, RS durch den Punkt G die Hyperbel LKG. Wenn somit $GO = z$, und $GQ = x$ ist, wird $KO = az : (a - z)$ sein, und da QJ immer gleich a ist, muß man zu der Hyperbelfläche KGO ein ihr gleiches Rechteck HQ nehmen und die Linien JQ, KO verlängern. Dann wird der Treffpunkt P auf einer Kurve GPW liegen, die der gefundenen Gleichung $adx = azdz : (a - z)$ genügt. Um aber aus dieser die gesuchte Kurve AB zu konstruieren, braucht man nur QP bis Z (Fig. 31) zu verlängern, so daß PZ gleich der Abszisse GQ ist. Dann wird der Punkt Z auf der gesuchten Kurve AB liegen.

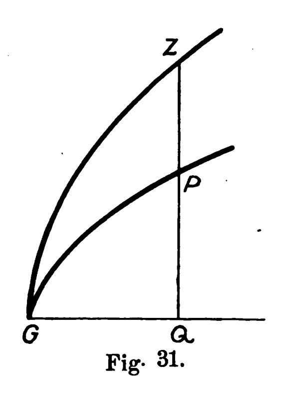


Fig. 31.

Weil nämlich $PZ = GQ = x = AD$ (Fig. 29) und QP (Fig. 31) $= z$ ist, wird

$$QP + PZ = z + x = y = DB$$

sein (Fig. 29).

Korollar I. NR (Fig. 30) ist eine Asymptote von GPW und $QP = BC$ (Fig. 29). Also hat auch die gesuchte Kurve AB eine zu AC parallele Asymptote.

Korollar II. Die Fläche ADB ist gleich $xy + ax - \frac{1}{2} y^2$.

Zwölfte Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

III. Die Natur der Kurve AB (Fig. 32) zu finden, die zu ihrer Tangente BD überall in einem gegebenen Verhältnis steht. Dieses Problem ist unbestimmt und läßt verschiedene Lösungen zu. Manchmal ist nämlich die Kurve AB eine geometrische, manchmal eine mechanische, je nachdem das gegebene Verhältnis zwischen der Kurve AB und der Tangente BD sich ändert. Dies wird aus der Lösung deutlicher hervorgehen.

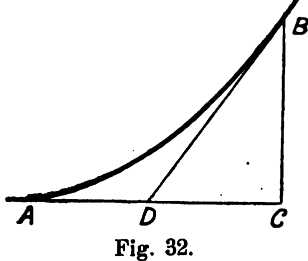


Fig. 32.

Es sei $AC = x$, $BC = y$, $AB = s$ und das Verhältnis von AB zu DB wie a zu 1. Nach Voraussetzung ist

$$dy : ds = y : \frac{s}{a},$$

mithin

$$ayds = sdy$$

und

$$ayds - sdy = o = (ayds - sdy)\frac{s^{a-1}}{y^2}.$$

Das Integral hiervon, das $s^a : y$ lautet, wird gleich einer konstanten Größe sein. Es sei also $s^a : y = b$. Dann wird

$$s^a = by \text{ oder } s = \sqrt[a]{by}$$

sein und

$$ds = \frac{bdy}{a\sqrt[a]{(by)^{a-1}}}.$$

Damit nun die Rechnung leichter geht, sei $a = 2$. Dann hat man

$$ds = \frac{b\,dy}{2\sqrt{by}}.$$

Es ist aber

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Daher wird

$$\frac{b\,dy^2}{4y} = dx^2 + dy^2$$

und nach Vereinfachung der Gleichung

$$b\,dy^2 - 4y\,dy^2 = 4y\,dx^2$$

sein oder

$$dy\sqrt{b-4y} = 2dx\sqrt{y}$$

und

$$dx = \frac{dy\sqrt{b-4y}}{2\sqrt{y}} = \frac{b\,dy - 4y\,dy}{2\sqrt{by-4y^2}} = \frac{\frac{1}{4}b\,dy - y\,dy}{\sqrt{\frac{1}{4}by - y^2}}$$
$$= \frac{\frac{1}{8}b\,dy - y\,dy}{\sqrt{\frac{1}{4}by - y^2}} + \frac{\frac{1}{8}b\,dy}{\sqrt{\frac{1}{4}by - y^2}}.$$

Es wird daher herauskommen

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{4}by - y^2} + \text{Int.}\,\frac{\frac{1}{8}b\,dy}{\sqrt{\frac{1}{4}by - y^2}}.$$

Dieses Integral erhält man aber, wenn man einen Halbkreis EGH (Fig. 33) herstellt, dessen Durchmesser $EH = \frac{1}{4}b$ ist, und $EF = y$ macht. Dann wird der

Bogen $EG =$

$$= \text{Int.}\,\frac{\frac{1}{8}b\,dy}{\sqrt{\frac{1}{4}by - y^2}}.$$

Es ist aber auch

$$FG = \sqrt{\tfrac{1}{4}by - y^2},$$

mithin AC oder x oder $FJ = FG + GE$, oder $GE = GJ$, d. h. die Kurve EJ in dieser oder AB in der früheren Figur ist eine Zykloide.

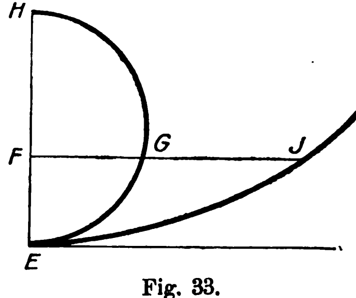


Fig. 33.

Es sei jetzt $a = \frac{3}{2}$. Dann wird

$$ds = \frac{b\,dy}{a\sqrt[a]{(by)^{a-1}}} = \frac{2b\,dy}{3\sqrt[3]{by}},$$

und daher

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{4b^2dy^2}{9\sqrt[3]{b^2y^2}},$$

Nach Vereinfachung der Gleichung findet man

$$dx = \frac{dy\sqrt{4b^2 - 9\sqrt[3]{b^2y^2}}}{3\sqrt[3]{by}}.$$

Um das Integral hiervon zu erhalten, setze man $by = m^3$. Dann wird $dy = 3m^2dm : b$, mithin

$$\frac{dy\sqrt{4b^2 - 9\sqrt[3]{b^2y^2}}}{3\sqrt[3]{by}} = \frac{m\,dm\sqrt{4b^2 - 9m^2}}{b}.$$

Das Integral hiervon ist

$$= -\frac{8}{27b}(b^2 - \tfrac{9}{4}m^2)\sqrt{b^2 - \tfrac{9}{4}m^2} = x.$$

Setzt man also den Wert von m ein, so kommt eine Gleichung in x und y heraus, die die Natur der gesuchten Kurve ausdrückt. In diesem Falle, nämlich $a = \frac{3}{2}$, wird daher die Kurve eine geometrische sein. Ist dagegen $a = 2$, so ist die Kurve, wie wir gesehen haben, eine mechanische.

Wenn wir nun die allgemeine Lösung erledigen wollen, so ist in derselben Weise zu verfahren, nämlich so:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{b^2dy^2}{a^2\sqrt[a]{(by)^{2a-2}}}$$

und

$$dx^2 = \frac{b^2dy^2}{a^2\sqrt[a]{(by)^{2a-2}}} - dy^2,$$

mithin

$$dx = \frac{dy\sqrt{b^2 - a^2\sqrt[a]{(by)^{2a-2}}}}{a\sqrt[a]{(by)^{a-1}}},$$

Man setze

$$(by)^{a-1} = m^a.$$

Dann wird

$$y = \frac{\sqrt[a-1]{m^a}}{b} \text{ und } dy = \frac{a m^{a-1} dm}{(ab - b)\sqrt[a-1]{m^{a^2-2a}}}.$$

Man erhält daher

$$dx = \frac{m^{a-2} dm \sqrt{b^2 - a^2 m^2}}{(ab - b)\sqrt[a-1]{m^{a^2-2a}}}.$$

Diese Formel zeigt, daß die Kurve, so oft sich das Integral dieser Größe nehmen läßt[24]), stets eine geometrische ist. Andernfalls wird sie eine mechanische sein. Denn je nachdem man den Buchstaben a wählt, wird auch diese Größe geändert. So ist es also wahr, was wir gesagt haben, daß nämlich das vorliegende Problem unendlich viele Lösungen hat.

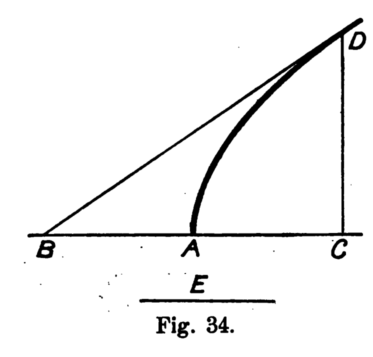


Fig. 34.

IV. Die Natur der Kurve zu finden, die so beschaffen ist, daß $DC : BC = E : AD$ (siehe Fig. 34).

Es sei $AC = x$, $CD = y$, $AD = s$. Nach Voraussetzung ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}, \text{ mithin } dy = \frac{a\,dx}{s}$$

Um aber den Buchstaben s beseitigen zu können (was zur Bestimmung der Kurven immer notwendig ist), muß man so vorgehen.

$$dy^2 = \frac{a^2 dx^2}{s^2},$$

also

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{s^2 dx^2 + a^2 dx^2}{s^2}$$

und

$$ds = \frac{dx\sqrt{s^2 + a^2}}{s},$$

mithin

$$dx = \frac{s\,ds}{\sqrt{s^2 + a^2}}$$

und die Integrale hiervon

$$x = \sqrt{s^2 + a^2}.$$

Hieraus findet man

$$s = \sqrt{x^2 - a^2}$$

und

$$ds = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Vereinfacht man die Gleichung, so findet man

$$x^2 dy^2 - a^2 dy^2 = a^2 dx^2$$

und endlich

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Dasselbe findet man anders und leichter auf folgende Weise.

Weil $s = a\,dx : dy$ ist, wird[25])

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a\,d^2x}{dy}$$

und daher

$$dy = \frac{a\,d^2x}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Um auf beiden Seiten das Integral nehmen zu können, multipliziere man beiderseits mit dx. Dann erhält man

$$dx\,dy = \frac{a\,dx\,d^2x}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Nimmt man die Integrale, so ergibt sich

$$x\,dy = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

und nach Vereinfachung der Gleichung

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

wie vorher.

Es folgt jetzt die Konstruktion dieser Kurve. Dabei ist zunächst zu bemerken, daß wegen $x = \sqrt{s^2 + a^2}$ und daher $x > s$ der unveränderliche Anfang von x jenseits des Scheitels A liegt, und zwar in der Entfernung E, da im Fall $s = o$ gerade $x = a$ wird. Wenn wir daher wollen, daß der Anfang von x im Scheitel selbst liegt, so müssen wir setzen $x = x + a$. Dann verwandelt sich die Gleichung $dy = adx : \sqrt{x^2 - a^2}$ in folgende

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax + x^2}},$$

die wir jetzt auf dreifache Weise konstruieren werden.

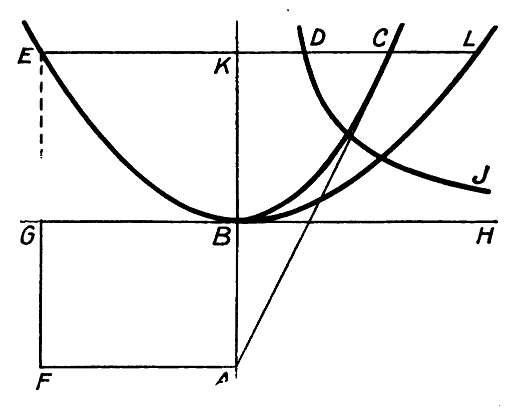


Fig. 35.

Man multipliziere die Gleichung mit a. Dann wird

$$ady = \frac{a^2dx}{\sqrt{2ax + x^2}}.$$

Nun ziehe man die Normalen AK, GH, die sich in B schneiden (Fig. 35), und nehme $BA = a$ und beschreibe mit dem Scheitel B und dem Mittelpunkt A die gleichseitige Hyperbel BC. Ferner konstruiere man eine Kurve DJ von solcher Art, daß BA überall die mittlere Proportionale zwischen KC und KD, d. h. daß

$$KD = \frac{a^2}{\sqrt{2ax + x^2}}$$

ist. Dann ziehe man die Parallele AF und nehme das Rechteck AG gleich der Fläche $HBKDJ$. Verlängert man jetzt DK und FG, so wird der Treffpunkt E auf der gesuchten Kurve liegen.

Diese Kurve läßt sich anders und leichter auf folgende Weise konstruieren. Man ziehe die Gerade AC und nehme ein der doppelten Hyperbelfläche ABC gleiches Rechteck AG. Dann wird nach Verlängerung von CK und FG der Punkt E wieder auf derselben gesuchten Kurve liegen[26]).

Noch anders läßt sie sich mittels der Rektifikation einer parabolischen Kurve auf folgende Weise konstruieren. Weil $dy = adx : \sqrt{2ax + x^2}$ ist, wird

$$dy + \frac{adx + xdx}{\sqrt{2ax + x^2}} \text{ (Diff. von } EK + KC = EC)$$

$$= \frac{2adx + xdx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{dx\sqrt{2a + x}}{\sqrt{x}}.$$

Man muß daher eine gewisse Kurve BL suchen, deren Differential $dx\sqrt{2a + x} : \sqrt{x}$ ist. Dann wird BL selbst gleich EC sein. Diese Kurve findet man aber so. Von

$$\frac{2adx^2 + xdx^2}{x}$$

nehme man dx^2 fort. Dann bleibt $2adx^2 : x$. Daher ist

$$\frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{x}} = \text{Diff. von } KL,$$

und

$$\text{Int. } \frac{dx\sqrt{2a}}{\sqrt{x}}, \text{ d. h. } \sqrt{8ax},$$

wird also gleich KL selbst sein. Die Kurve BL ist somit eine Parabel mit dem Parameter $8AB$. Wenn man dieses BL zur Geraden ausstreckt und am Punkte C als Ordinate anbringt, so wird der andere Endpunkt E wieder auf der gesuchten Kurve AE liegen.

Korollar. Die Kurve BE ist gleich der Hyperbelordinate KC. Bezeichnet man nämlich BE mit s, so wird

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{a^2 dx^2}{2ax + x^2}} = dx\sqrt{\frac{a^2 + 2ax + x^2}{2ax + x^2}}$$

$$= \frac{adx + xdx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \text{Diff. von } KC.$$

Dreizehnte Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

Wir haben bei dem vorigen Problem zwei Verfahren auseinandergesetzt, durch die wir zu derselben Lösung gelangten. Das eine war das gewöhnliche und ergab sich aus der einfachen Berechnung von Integralen. Das andere dagegen benutzte Differentiale von Differentialen. Wir wollen deshalb bei dieser Gelegenheit noch das eine oder das andere Beispiel anführen, wo sich durch die gewöhnliche Methode die Lösung kaum ermöglichen läßt, sondern eine besondere Rechnung nötig ist, bei der nicht nur die Differentiale der Unbestimmten in Betracht gezogen werden, sondern auch die Differentiale der Differentiale selbst. Die Regeln hierfür sind aus der Rechnung selbst zu entnehmen.

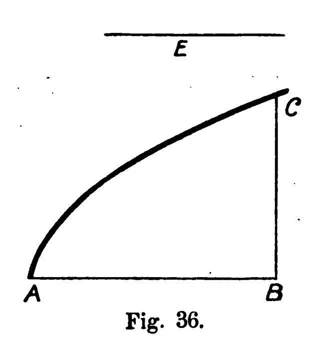


Fig. 36.

V. Es wird eine Kurve AC gegeben ($AB = x$, $BC = y$, $AC = s$, $E = a$) von solcher Beschaffenheit, daß $adsd^2x = dy^3$ ist. Dabei wird angenommen, daß ds eine konstante Größe ist[27]), d. h. $d^2s = 0$.

Lösung. Weil

$$dx = \sqrt{ds^2 - dy^2}$$

ist, wird

$$d^2x = -\frac{dy\,d^2y}{\sqrt{ds^2 - dy^2}}$$

sein, mithin

$$adsd^2x = dy^3 = -\frac{ads\,dy\,d^2y}{\sqrt{ds^2 - dy^2}}$$

oder

$$dy^2 = - \frac{a\,ds\,d^2y}{\sqrt{ds^2 - dy^2}}.$$

Da aber auf keiner Seite das Integral genommen werden kann, dividiere man beiderseits durch dy^2. Dann erhält man folgende Gleichung

$$1 = - \frac{a\,ds\,d^2y}{dy^2\sqrt{ds^2 - dy^2}}.$$

Von der zweiten Größe läßt sich nun zwar das Integral nach den in der Integralrechnung gelehrten Regeln erhalten[28]). Weil aber die Einheit kein Differential ist und daher kein Integral hat, so muß man beiderseits mit einem konstanten Differential wie ds multiplizieren und erhält auf diese Weise

$$ds = - \frac{a\,ds^2\,d^2y}{dy^2\sqrt{ds^2 - dy^2}}.$$

Demnach wird das Integral von ds, das s lautet, gleich dem Integral der andern Seite

$$- \frac{a\,ds^2\,d^2y}{dy^2\sqrt{ds^2 - dy^2}}$$

sein, wofür man nach der vorletzten Regel in der zweiten Vorlesung findet

$$\frac{a\,ds^2\sqrt{ds^2 - dy^2}}{ds^2\,dy} = \frac{a\sqrt{ds^2 - dy^2}}{dy}.$$

Es bildet sich daher folgende Gleichung

$$s = \frac{a\sqrt{ds^2 - dy^2}}{dy}$$

oder

$$s\,dy = a\sqrt{ds^2 - dy^2}.$$

Vereinfacht man die Gleichung, so findet man

$$s^2dy^2 + a^2dy^2 = a^2ds^2. \quad \text{und} \quad \frac{(s^2 + a^2)\,dy^2}{a^2} = ds^2.$$

Da aber $ds^2 - dy^2 = dx^2$ ist, so wird also sein

$$\frac{s^2dy^2}{a^2} = dx^2,$$

mithin

$$sdy = adx, \quad \text{d. h.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}.$$

Dies zeigt uns, daß es sich um die Kurve handelt, deren Natur wir bei dem vorigen Problem entwickelt haben.

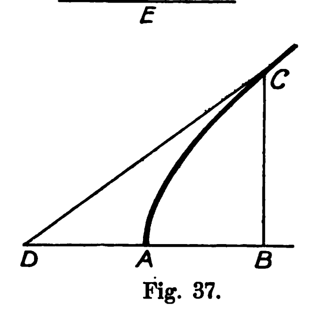


Fig. 37.

VI. AC (Fig. 37) ist eine Kurve von solcher Beschaffenheit, daß DB^2 sich zu BC^2 verhält wie E zu AC. Gesucht wird die Natur dieser Kurve.

Lösung. Nach Voraussetzung ist

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{a}{s},$$

mithin

$$s = \frac{ady^2}{dx^2}$$

und [wenn man $d^2x = 0$ annimmt[29]]

$$ds = \frac{2adyd^2y}{dx^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

folglich

$$\frac{2adyd^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = dx^2.$$

Man nehme auf beiden Seiten die Integrale:

$$2a\sqrt{dx^2 + dy^2} = xdx.$$

Dann kommt nach Vereinfachung der Gleichung heraus

$$dx\sqrt{x^2 - 4a^2} = 2ady.$$

Aus dieser Gleichung wird die Kurve in folgender Weise konstruiert: Man ziehe die Normalen FB, AC (Fig. 38) und nehme $BA = 2a$. Dann beschreibe man mit dem Mittelpunkt A und dem Scheitel B die gleichseitige Hyperbel BD und ziehe AG parallel zu BF. Nimmt man das Rechteck AH gleich der Hyperbelfläche BDJ, so wird der Treffpunkt E auf der gesuchten Kurve liegen.

VII. Man nehme alles wie oben an, und es sei

$$\frac{dx^2}{dy^2} = \frac{s}{a}.$$

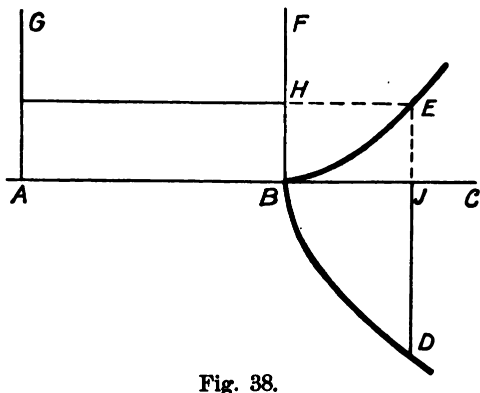


Fig. 38.

Lösung. Nach Voraussetzung ist

$$s = \frac{adx^2}{dy^2}.$$

Es wird also mutatis mutandis dieselbe Kurve sein, nur daß x an die Stelle von y tritt und umgekehrt.

VIII. AC (Fig. 39) ist eine Kurve von solcher Beschaffenheit, daß CB sich zur Subtangente verhält, wie das Quadrat von G zu der Fläche $ACFD$.

Fig. 39.

Lösung. Es sei $AB = x$, $BC = y$, die Fläche $ACFD = s$, $G = a = AD$. Nach Voraussetzung ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{s}.$$

Es wird also sein

$$sdy = a^2 dx$$

und ihre Differentiale[30] (wenn man $d^2y = 0$ annimmt)

$$ady^2 - xdy^2 = a^2d^2x.$$

Man multipliziere beiderseits mit dx. Dann erhält man

$$adxdy^2 - xdxdy^2 = a^2dxd^2x.$$

Nimmt man jetzt die Integrale, so wird

$$axdy^2 - \tfrac{1}{2}x^2dy^2 = \tfrac{1}{2}a^2dx^2$$

oder

$$2axdy^2 - x^2dy^2 = a^2dx^2.$$

Man findet daher

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

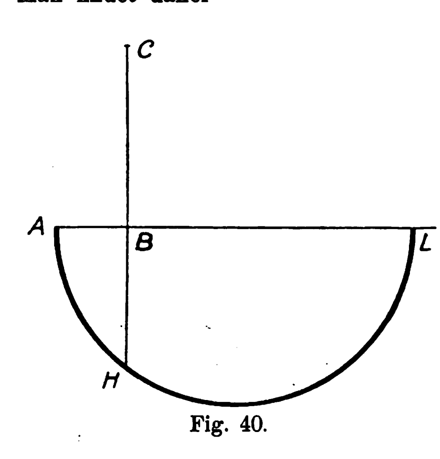


Fig. 40.

Aus dieser Gleichung wird die Kurve in folgender Weise konstruiert. Man beschreibe mit dem Durchmesser[31] AL (Fig. 40) $= 2AD$ (Fig. 39) den Halbkreis AHL, ziehe die Ordinate HBC und nehme BC gleich dem Bogen AH. Dann wird der Punkt C auf der gesuchten Kurve liegen. Denn das Differential des Bogens AH ist gleich $adx : \sqrt{2ax - x^2}$ und gleich dem Differential von BC.

Vierzehnte Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

Alle Kurven, deren Natur wir bisher gefunden haben, waren entweder geometrische, d. h. solche, deren Ordinaten zu den Abszissen in einer durch eine algebraische Gleichung ausdrückbaren Beziehung stehen, oder sie waren mechanische, d. h. solche, deren Natur man durch eine Gleichung nur erhalten kann, wenn man eine gewisse Quadratur oder Rektifikation

einer geometrischen Kurve voraussetzt. Wenn daher diese Kurve, von deren Rektifikation oder Quadratur die Natur der andern gesuchten abhängt, selbst eine mechanische ist, so wird die gesuchte Kurve nicht eine einfach mechanische sein, sondern einer zweiten Gattung mechanischer Kurven angehören. Wenn ferner die erzeugende Kurve [so nenne ich die Kurve, von deren Quadratur oder Rektifikation die gesuchte abhängt] zur zweiten Gattung gehört, so wird die gesuchte zur dritten Gattung mechanischer Kurven gehören usw. Es mag genügen, ein Beispiel beizufügen, wo die erzeugende Kurve eine einfach mechanische ist oder zur ersten Gattung gehört[32].

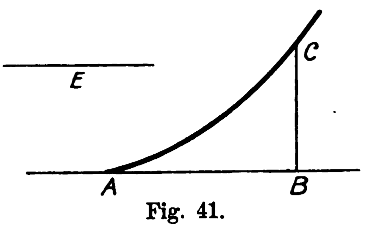


Fig. 41.

IX. AC (Fig. 41) ist die gesuchte Kurve, $AB = x$, $BC = y$, $E = a$. Es besteht [$d^2x = 0$ angenommen] folgende Eigenschaft

$$2ax(d^2y)^2 - x^2(d^2y)^2 = dx^4.$$

Man sucht die Natur der vorliegenden Kurve.

Lösung. Nach der gegebenen Gleichung ist

$$(d^2y)^2 = \frac{dx^4}{2ax - x^2},$$

mithin

$$d^2y = \frac{dx^2}{\sqrt{2ax - x^2}} = dx \cdot \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Man multipliziere beiderseits mit a. Dann wird

$$ad^2y = dx \cdot \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

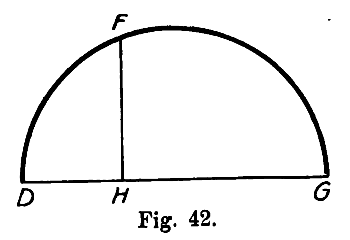


Fig. 42.

Das Integral der linken Seite hat man. Das der rechten Seite aber hängt von der Rektifikation der Kreislinie ab. Um es zu konstruieren, mache man einen Halbkreis DFG mit dem Durchmesser $DG = 2E$ (Fig. 42) und schneide $DH = x$ ab. Dann wird

$$\text{der Bogen } DF = \text{Integr. } \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Es sei also Bogen $DF = s$. Dann wird, da

$$\text{Integr. } a\,d^2y = a\,dy$$

ist,

$$a\,dy = s\,dx$$

sein. Die gesuchte Kurve läßt sich demnach so konstruieren. Man ziehe die Senkrechten JK, LN (Fig. 43) und nehme $JL = a$. Durch L ziehe man die Parallele LQ und setze an $JN = x$ als Ordinate die Strecke $NM = s$ an. Es wird dadurch zunächst die Kurve JM erzeugt, die bei dem vorigen Problem entwickelt wurde und eine mechanische ist. Nimmt man also das Rechteck LP gleich der Fläche JMN, so wird der Treffpunkt O auf der gesuchten Kurve JO liegen.

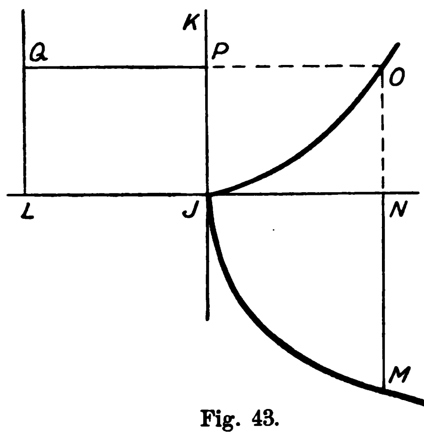


Fig. 43.

X. Gegeben ist die Kurve AE. Man sucht die Natur einer andern AC, so daß die Senkrechte DC gleich der Ordinate DE ist.

Es sei $AB = x$, $BC = y$, $AD = m$, $DE = n = DC$. Da $Dd : dO = DC : BD$ ist, d. h.

$$dm : dn = n : BD,$$

so folgt[33])

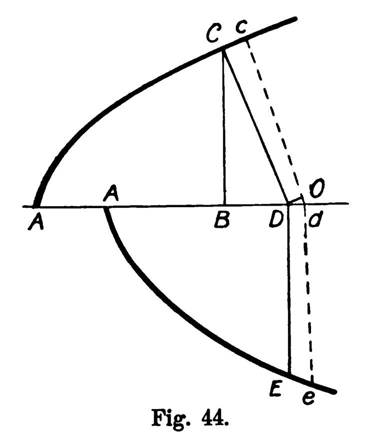


Fig. 44.

$$DB = \frac{n\,dn}{dm},$$

mithin

$$AB = m - \frac{n\,dn}{dm} = x.$$

Es ist aber

$$DC^2 - BD^2 = BC^2,$$

d. h.

$$n^2 - \frac{n^2 dn^2}{dm^2} = y^2,$$

mithin

$$\sqrt{n^2 - \frac{n^2 dn^2}{dm^2}} = y.$$

Da aber AE eine gegebene Kurve ist, so wird sich die Größe $dn : dm$ oder $dn^2 : dm^2$ mit Hilfe der Gleichung immer beseitigen lassen. Es werden demnach AB und BC in algebraischen Größen ausgedrückt herauskommen. So oft also die Kurve AE eine geometrische ist, wird auch die gesuchte AC eine geometrische sein. Es sei z. B. AE eine Parabel, der Parameter $= a$, $AD = m$, $DE = n = \sqrt{am}$. Dann wird folglich sein

$$AB = x = m - \tfrac{1}{2}a$$

und

$$BC = y = \sqrt{am - \tfrac{1}{4}a^2},$$

mithin

$$y^2 = am - \tfrac{1}{4}a^2 \quad \text{und} \quad m = \frac{y^2 + \frac{1}{4}a^2}{a}.$$

Hieraus erhält man

$$x = m - \tfrac{1}{2}a = \frac{y^2 + \frac{1}{4}a^2}{a} - \tfrac{1}{2}a = \frac{y^2 - \frac{1}{4}a^2}{a}$$

oder

$$ax = y^2 - \tfrac{1}{4}a^2.$$

Daraus geht hervor, daß die gesuchte Kurve ACc ebenfalls eine Parabel ist, und zwar dieselbe wie AE. Nur liegt der Scheitel um den vierten Teil des Parameters über den Punkt A hinaus.

Es sei jetzt AE ein Kreis, der Durchmesser $= 2a$, $AD = m$, $DE = n = \sqrt{2am - m^2}$. Dann wird wegen dieser Setzung

$$AB = x = 2m - a$$

und

$$BC = y = \sqrt{4am - a^2 - 2m^2}.$$

Es wird also, weil $x = 2m - a$ ist, $m = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$ sein, mithin

$$y^2 = 4am - a^2 - 2m^2 = ax + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}x^2.$$

Um diese Kurve zu konstruieren, sei ABC (Fig. 45) der gegebene Kreis und G sein Mittelpunkt, durch den man die Senkrechte BGF ziehe. Man nehme $GF = BG$ und mache GD und GE gleich BC selbst. Über den Achsen BF und ED beschreibe man jetzt die Ellipse EFD. Dann behaupte ich, daß dies die gesuchte Kurve, d. h. daß jede Senkrechte HJ gleich der Ordinate JK ist[34]).

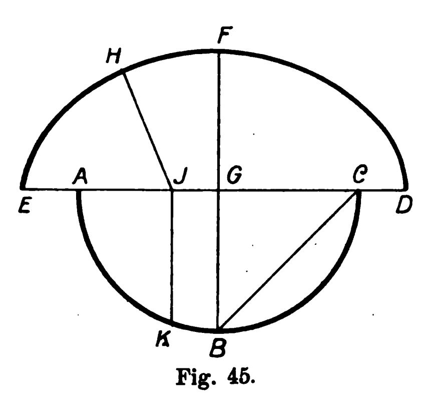


Fig. 45.

FE sei eine Hyperbel, $AD = m$, $DE = n = \frac{a^2}{m}$. Dann wird

$$AB = x = \frac{m^4 + a^4}{m^3},\ BC = y = \frac{\sqrt{a^4m^4 - a^8}}{m^3} = \sqrt{\frac{a^4m^4 - a^8}{m^6}}$$

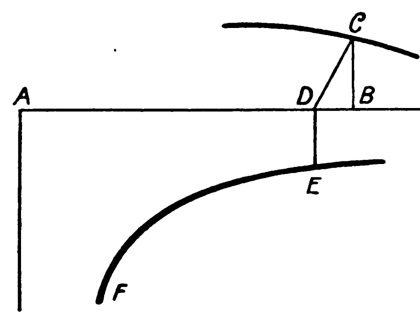


Fig. 46.

sein. Weil also $x = (m^4 + a^4) : m^3$ ist, wird

$$m^3x = m^4 + a^4 \text{ und}$$
$$m^4 = m^3x - a^4$$

sein, und weil $y = \sqrt{a^4m^4 - a^8} : m^3$,

$$m^6y^2 = a^4m^4 - a^8.$$

Setzt man den Wert von m^4 ein, so kommt heraus[35])

$$m^6y^2 = a^4xm^3 - 2a^8$$

und

$$m^6 = \frac{a^4 x m^3 - 2a^8}{y^2},$$

mithin

$$m^3 = (\tfrac{1}{2}a^4 x \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^8 x^2 - 2a^8 y^2}) : y^2.$$

Es wird daher

$$x = \frac{m^4 + a^4}{m^3} =$$

$$= \frac{(\tfrac{1}{2}a^4x \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^8x^2 - 2a^8y^2})\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}a^4x \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^8x^2 - 2a^8y^2}} + a^4y^2\sqrt[3]{y^2}}{(\tfrac{1}{2}a^4x \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^8x^2 - 2a^8y^2})\sqrt[3]{y^2}}.$$

Fünfzehnte Vorlesung.

Über oskulierende Kreise und die Abwicklung der Kurven und deren Anwendung bei der Rektifikation von Kurven.

ABC sei eine beliebige Kurve, und man ziehe in irgendeinem Punkte *B* zur Kurve die unbegrenzte Senkrechte *BD*. Nimmt man alsdann irgendwo auf dieser Senkrechten einen Punkt *D* und beschreibt um ihn als Mittelpunkt einen Kreis *CBF*, so berührt bekanntlich dieser Kreis die Kurve in *B* und schneidet dieselbe, wenn die Wurzeln nicht imaginär sind, anderswo in *C*. Es ist auch klar, daß bei Annäherung des Mittelpunktes *D* an *B* der Punkt *C* ebenfalls an diesen mehr heranrückt. Daher wird es eine bestimmte Entfernung *BD* geben derart, daß der Punkt *C* ganz nach *B* fällt, sobald *D* in sie gelangt ist, und wenn dies eintritt, ist der Kreis *CBF* der, den Leibniz den oskulierenden oder den Oskulatorkreis nennt, vielleicht deshalb, weil die Punkte *B* und *C* sich

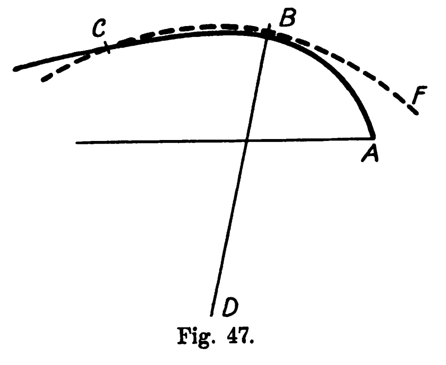


Fig. 47.

gleichsam oskulieren (küssen)[36]. Dieser Kreis hat die Eigenschaft, der einzige zu sein, der die Kurve ABC im Punkte B schneidet [wenn nicht der Punkt B im Scheitel A liegt; dann nämlich berührt der Kreis die Kurve immer, vorausgesetzt, daß die Lage der Kurve auf beiden Seiten ähnlich ist]. Alle übrigen Kreise, deren Mittelpunkte auf der Geraden BD liegen, berühren die Kurve in demselben Punkte B. Daß der oskulierende Kreis die Kurve schneidet, wird unten bewiesen werden.

Was von dem Mittelpunkt D des Kreises gesagt wurde, der die Kurve in B oskuliert, gilt in gleicher Weise von allen andern, wo auch der Punkt B angenommen wird. Wenn also der Punkt B variiert, werden auch die Mittelpunkte D variieren, so daß sie eine gewisse Kurve $ED\delta$ beschreiben, die, wie Herr Huygens gezeigt hat, jene ist, durch deren Abwicklung die Kurve $AB\beta$ beschrieben wird[37]. D. h. wenn man auf der Kurve $ED\delta$ einen Faden $AED\delta$ anbringt und das Ende A mit gleichmäßiger Handführung nach B bewegt, so wird der Punkt A die Kurve $AB\beta$ beschreiben, von der jeder Punkt den Mittelpunkt seines oskulierenden Kreises auf der Kurve $ED\delta$ hat, und zwar dort, wo die Abwickelnde BD die Kurve $ED\delta$ berührt. Es ist daher zu zeigen, daß die Mittelpunkte der oskulierenden Kreise auf der Kurve liegen, durch deren Abwicklung die andere Kurve beschrieben wird, um deren oskulierende Kreise es sich handelt.

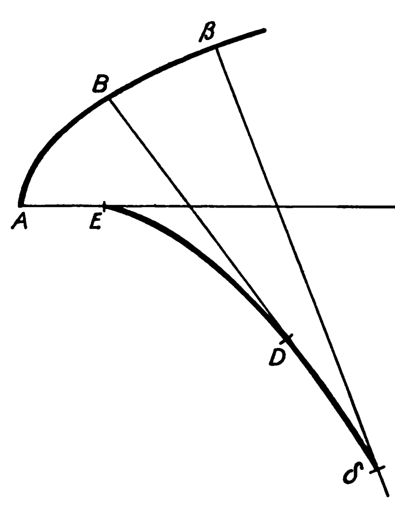


Fig. 48.

Zu diesem Zwecke muß man die Entstehung der durch Abwicklung erzeugten Kurven betrachten. Es liege die Kurve ADF vor, die man sich aus unendlich vielen geraden Stücken AB, BC, CD, DE, EF zusammengesetzt denken kann. Man

stelle sich nun vor, daß auf dieser Kurve ein Faden $ABCDEF$ angebracht ist, dessen eines Ende F fest, das andere A aber beweglich ist. Wenn dann dieses Ende nach K bewegt wird, so beschreibt offenbar der Endpunkt A des Linienstückchens AB einen Kreisbogen AG, mit dem Mittelpunkt B, und dieser kleine Kreisbogen wird so weit fortgesetzt werden, bis AB, d. h. GB, mit dem Linienstückchen BC in gerader Linie liegt. Darauf wird im weiteren Verlauf der Bewegung der Kreisbogen GH beschrieben werden mit dem Mittelpunkt C und dem Radius CG oder CH, bis HC mit dem Linienstückchen CD in gerader Linie liegt. Und auf dieselbe Weise werden die kleinen Kreisbögen HJ und JK mit den Mittelpunkten D oder E und den Radien DH und EJ beschrieben.

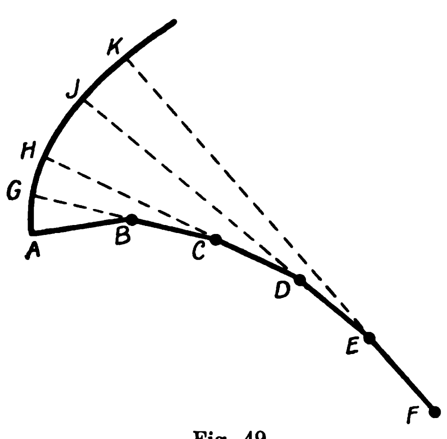


Fig. 49.

Hieraus folgt:

1. daß die Abwickelnde HD eine Tangente der abgewickelten Kurve ist;
2. daß HD senkrecht ist zu der durch die Abwicklung erzeugten Kurve;
3. daß HD gleich der Abgewickelten $ABCD$ ist, wenn nämlich das Ende des Fadens und der Anfang der abgewickelten Kurve zusammenfallen; andernfalls wird HD um eine konstante Länge größer oder kleiner sein;
4. daß der Treffpunkt von zwei Senkrechten HD und JD einer beliebigen gegebenen Kurve $AHJK$, die unendlich wenig voneinander entfernt sind, sich auf der Kurve ADF befindet, durch deren Abwicklung die gegebene AHK beschrieben wird.

Hiernach läßt sich leicht beweisen, daß der Mittelpunkt des Kreises, der die Kurve AHM in H oskuliert, im Punkte D

liegt. Der um den Mittelpunkt D mit dem Radius DH beschriebene Kreis berührt nämlich die Kurve AHK in H und schneidet[38] sie in J [oder geht wenigstens dort hindurch]. Da aber wegen der unendlich kleinen Entfernung HJ der Punkt J nach H fallend gedacht werden kann, so folgt, daß der um den Mittelpunkt D mit dem Radius DH beschriebene Kreis der oskulierende der Kurve AHK im Punkte H ist. Mithin liegen die Mittelpunkte der oskulierenden Kreise auf der Kurve, durch deren Abwicklung die Kurve erzeugt wird, deren oskulierende Kreise sie sind.

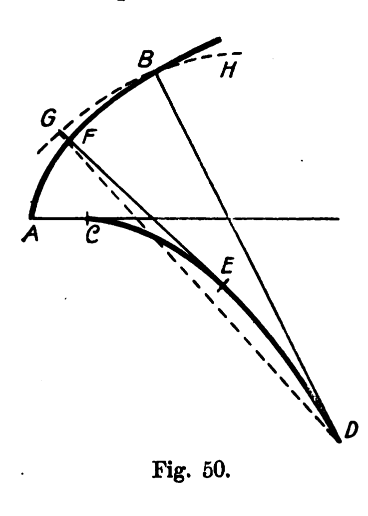


Fig. 50.

Daß diese oskulierenden Kreise die Kurve schneiden, wird so bewiesen: Es sei AB eine Kurve, CED eine andere, durch deren Abwicklung AB beschrieben wird, DB die abwickelnde Gerade, die nach dem soeben Bewiesenen der Radius des in B oskulierenden Kreises sein wird. Man ziehe die Gerade DG, die die Kurve in F und die Kreisperipherie in G schneidet, und vom Punkte F ziehe man die Tangente FE. Nun ist:

$$GD = BD = FE + \text{Kurve } ED > \text{Gerade } FD,$$

mithin

$$GD > FD.$$

Daher liegt der Punkt G außerhalb der Kurve AB. Nicht viel anders wird bewiesen, daß der Punkt H innerhalb der Kurve AB liegt. Also schneidet die Peripherie GBH die Kurve AB[39].

Korollar. Aus dem Gesagten folgt, daß, wenn die Kurve AB eine geometrische ist, auch CED eine geometrische ist, und zwar eine rektifizierbare, weil die Strecke BD, die ihr gleich oder um eine gewisse Konstante größer ist, geometrisch gefunden werden kann.

Sechzehnte Vorlesung.

Auffindung des Mittelpunktes eines oskulierenden Kreises und der Evolute.

Schon oben haben wir angedeutet, daß der oskulierende Kreis der ist, der die Kurve in verschiedenen Punkten schneidend durch einen Zustand hindurchgeht, wo drei Schnittpunkte zusammenfallen oder besser zum Zusammenfallen kommen. Man kann nämlich immer einen Kreis $BCDE$ geben, der irgend eine Kurve wenigstens in vier Punkten schneidet[40]. Will man daher den Mittelpunkt eines oskulierenden Kreises suchen, so setze man nach der *Descartes*schen Geometrie[41] $AH = s$, $HG = t$ und den Radius $BG = u$, ebenso $AF = x$ und $BF = y$. Aus diesen Daten läßt sich die Gleichung des Kreises erhalten. Ersetzt man in ihr x durch seinen Ausdruck in y oder y durch den in x, je nachdem die Natur der gegebenen Kurve es fordert, so wird x oder y wenigstens vier Dimensionen haben, weil der Kreis wenigstens in vier Punkten die Kurve schneiden kann. Damit also dieser Kreis ein oskulierender wird, muß man annehmen, daß die gefundene Gleichung drei gleiche Wurzeln hat, d. h. daß drei Abszissen oder drei Ordinaten, die Schnittpunkten entsprechen, einander gleich werden. Verfährt man nach der Regel des *Descartes*, so wird eine Gleichung herauskommen, die die Beziehung zwischen AH und HG erkennen läßt und daher die Natur der Kurve, welche die Mittelpunkte der oskulierenden Kreise beschreiben.

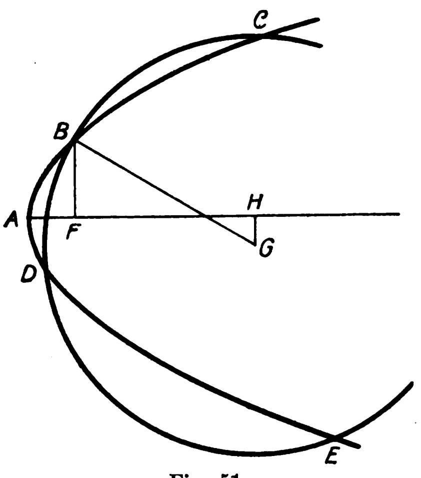


Fig. 51.

Das Verfahren ist nun folgender Art:

$$BG^2 - (BF + GH)^2 = FH^2,$$

d. h.[42])

$$u^2 - y^2 - 2ty - t^2 = s^2 - 2sx + x^2$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2sx + 2ty + s^2 + t^2 - u^2 = 0$$

In dieser Gleichung ist der Wert von x oder y nach der Natur der gegebenen Kurve einzusetzen. Diese sei z. B. eine Parabel, also $x^2 = y^4 : a^2$ und $x = y^2 : a$. Dann erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{y^4}{a^2} + y^2 - \frac{2sy^2}{a} + 2ty + s^2 + t^2 - u^2 = 0$$

oder

$$y^4 + \left.\begin{matrix} a^2 \\ -2as \end{matrix}\right\} y^2 + 2a^2ty \left.\begin{matrix} +s^2a^2 \\ +t^2a^2 \\ -u^2a^2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Da diese Gleichung drei gleiche Wurzeln haben soll, setze man nach der Weise *Descartes* $y - e = 0$, $y - e = 0$, $y - e = 0$ und für die letzte Wurzel $y - f = 0$; darauf multipliziere man alle vier, und es ergibt sich:

$$y^4 \left.\begin{matrix} -3e \\ -f \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} +3e^2 \\ +3ef \end{matrix}\right\} y^2 \left.\begin{matrix} -e^3 \\ -3e^2f \end{matrix}\right\} y + e^3f = 0.$$

Die einzelnen Glieder dieser Gleichung sind mit den einzelnen Gliedern der gefundenen Gleichung zu identifizieren. Man erhält also

$$\begin{aligned} -3e - f &= 0, \\ 3e^2 + 3ef &= a^2 - 2as, \\ -e^3 - 3e^2f &= 2a^2t, \\ e^3f &= (s^2 + t^2 - u^2)a^2. \end{aligned}$$

Nach der ersten ist $f = -3e$. Setzt man den Wert von f in die zweite Gleichung ein, so kommt heraus

$$-6e^2 = a^2 - 2as,$$

und bei der dritten wird sich ergeben

$$8e^3 = 2a^2t.$$

Es wird also nach jenem Resultat

$$e = \sqrt{\frac{2as - a^2}{6}},$$

nach diesem

$$e = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2a^2t}$$

sein, und daher

$$\sqrt{\frac{2as - a^2}{6}} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2a^2t}.$$

Um diese Gleichung leichter in rationaler Form zu erhalten, sei

$$s - \tfrac{1}{2}a = r.$$

Dann wird sein

$$\sqrt{\frac{ar}{3}} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2a^2t}.$$

Vereinfacht man die Gleichung, so kommt heraus

$$16r^3 = 27at^2.$$

Diese Gleichung zeigt uns also die Natur der Kurve, die bei der Parabel die Mittelpunkte der oskulierenden Kreise beschreiben. Dabei ist zu bemerken, daß diese Kurve eine kubische Parabel zweiter Art ist mit dem Parameter $\frac{27}{16}a$. Ihr Scheitel hat vom Scheitel der gegebenen Parabel den Abstand $\frac{1}{2}a$, weil $s - \frac{1}{2}a = r$. Wollte man auch den Radius GB finden, so ist nichts weiter nötig, als oben in der vierten Gleichung

$$e^3 f = (s^2 + t^2 - u^2)a^2$$

für f und e ihren Wert einzusetzen. Denn nach Beseitigung von f hat man

$$-3e^4 = (s^2 + t^2 - u^2)\,a^2.$$

Da aber

$$e^2 = \frac{2as - a^2}{6} = \frac{ar}{3}$$

ist, so wird

$$-\frac{a^2r^2}{3} = (s^2 + t^2 - u^2)a^2 = (r^2 + ar + \tfrac{1}{4}a^2 + t^2 - u^2)a^2.$$

Nach Vereinfachung der Gleichung findet man

$$u^2 = GB^2 = \tfrac{4}{3}r^2 + ar + \tfrac{1}{4}a^2 + t^2$$

und daher

$$u = GB = \sqrt{\tfrac{4}{3}r^2 + ar + \tfrac{1}{4}a^2 + t^2}.$$

Hiernach wird im Falle $r = 0$ sein $t = 0$ und $u = \frac{a}{2}$, d. h.

der Mittelpunkt des Kreises, der die Parabel im Scheitel oskuliert, ist von demselben um die Größe $\frac{1}{2}a$ entfernt. Dies kann man auch auf andere Weise finden, indem man annimmt, daß die oben gefundene Gleichung

$$\left.\begin{matrix} y^4 + a^2 \\ -2as \end{matrix}\right\} y^2 + 2a^2ty \left.\begin{matrix} +s^2a^2 \\ +t^2a^2 \\ -u^2a^2 \end{matrix}\right\} = 0$$

vier gleiche Wurzeln hat; es können nämlich nicht drei Wurzeln im Scheitel zusammenfallen, ohne daß auch die vierte sich anschließt, wegen der ähnlichen Lage der Kurve oberhalb und unterhalb der Achse. Es sei also, wie es früher gemacht worden ist, $y - e = 0$, $y - e = 0$, $y - e = 0$, $y - e = 0$. Dies gibt zusammen multipliziert

$$y^4 - 4ey^3 + 6e^2y^2 - 4e^3y + e^4 = 0.$$

Die einzelnen Glieder dieser Gleichung sind mit denen der andern zu identifizieren. Weil hiernach $-4e = 0$ ist, so wird auch $6e^2 = 0$, $-4e^3 = 0$ und $e^4 = 0$ sein, mithin

$$a^2 - 2as = 0, \text{ d. h. } s = \tfrac{1}{2}a,$$
$$2a^2t = 0, \text{ d. h. } t = 0,$$
$$s^2 + t^2 - u^2 = 0, \text{ d. h. (wegen } t = 0) \; s = u = \tfrac{1}{2}a,$$

wie vorher.

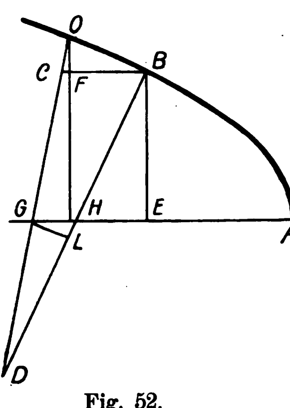


Fig. 52.

Wie es bei der Parabel gemacht wurde, hat man bei allen andern geometrischen Kurven zu verfahren. Die *Descartes*sche Geometrie dehnt sich hierin nicht auf die mechanischen aus. Wie man nun bei allen Kurven, seien es geometrische oder mechanische, die Mittelpunkte der oskulierenden Kreise allgemein findet, läßt sich mit Hilfe der Differentialrechnung ohne Schwierigkeit zeigen. Es sei also irgendeine Kurve AB gegeben, bei der man die Mittelpunkte der oskulierenden Kreise finden soll. Wir haben oben gezeigt, daß diese auf der Kurve liegen, durch deren Abwicklung die gegebene AB entsteht oder, was dasselbe ist, in den Treff-

punkten D von zwei Senkrechten BD, OD, die um eine unendlich kleine Größe voneinander entfernt sind. Man muß daher die Länge BD finden aus der Abszisse AE und der Ordinate BE. Zu diesem Zweck ziehe man BC parallel zu AG und OF senkrecht zu BC. Es sei $AE = x$, $EB = y$, mithin $BF = dx$, $FO = dy$. Dann wird

$$FC = \frac{dy^2}{dx} \text{ und daher } BC = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}.$$

Da nun $BF : FO = BE : EH$ ist, so wird

$$EH = \frac{y\,dy}{dx}, \quad BH = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} \text{ und } AH = x + \frac{y\,dy}{dx}$$

und das Differential von AH (vorausgesetzt, daß $d^2x = 0$ ist)

$$dx + \frac{dy^2 + y\,d^2y}{dx} = HG.$$

Weil aber $BC : HG = BD : HD$ ist, so wird, wenn man teilt,

$$(BC - HG) : BC = BH : BD,$$

d. h.

$$-\,y\,d^2y : (dx^2 + dy^2) = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} : BD.$$

Man erhält also

$$BD = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-\,dx\,d^2y}.$$

Dasselbe hätte man auch anders finden können, indem man sagte:

$$BO : BF = HG : LG,$$

folglich

$$LG = \frac{dx^2 + dy^2 + y\,d^2y}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Nun ist aber

$$(BO - LG) : BO = (BL \text{ oder } BH) : BD,$$

und für BD kommt dann dasselbe heraus.

Noch auf andere Weisen kann man zur Kenntnis der Strecke DB gelangen. Man ziehe nämlich zwei Tangenten BM, ON und den kleinen Bogen oder die Senkrechte MP. Dann wird NM das Differential von AM sein, und weil

$BO : OF = NM : MP$ ist, erhält man MP. Da aber POM und BDO ähnliche Dreiecke sind, so muß man ansetzen: Wie PM zu BO, so MO zu der gesuchten Strecke BD.

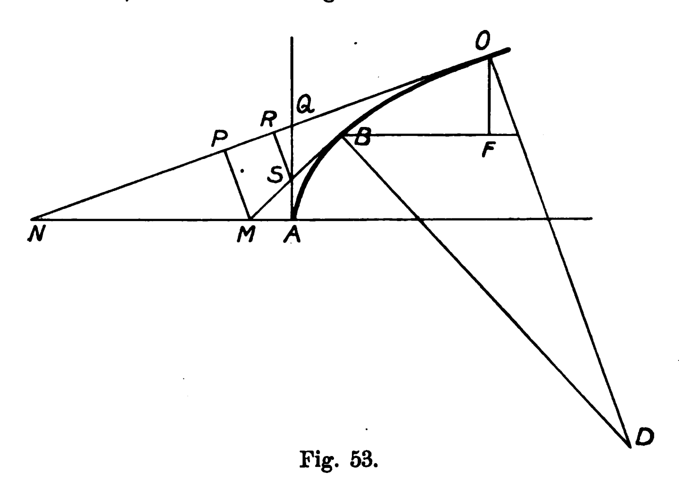


Fig. 53.

Oder noch anders: Man ziehe die Senkrechte AQ; dann wird SQ das Differential von AS sein, und da $BO : BF = SQ : SR$ und $SR : BO = OS : BD$, so wird man BD finden können, welches immer gleich

$$\frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx d^2 y}$$

sein wird. Setzt man in dieser Größe für dx oder dy seinen Wert ein, je nachdem es die Natur der Kurve verlangt, so wird immer BD in endlichen Größen und ohne Differentiale herauskommen.

Siebzehnte Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

Damit das, was wir oben gesagt haben, bestätigt werde, daß nämlich die Mittelpunkte der oskulierenden Kreise auf der Kurve liegen, durch deren Abwicklung die andere erzeugt wird, wollen wir das bereits oben angezogene Beispiel der

Parabel vorführen. Dabei wird man sehen, daß dieselbe Gleichung herauskommt für die Natur der Kurve, die durch ihre Abwicklung die Parabel beschreibt, wie sie herauskommt für die Natur der Kurve der oskulierenden Mittelpunkte.

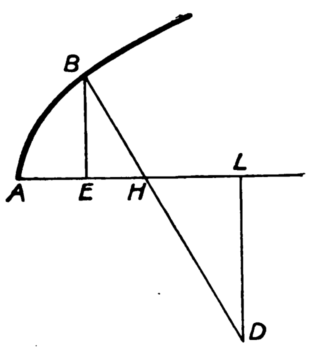


Fig. 54.

Es sei also AB eine Parabel, $AE = x$, $BE = y = \sqrt{ax}$. Weil allgemein bei allen Kurven

$$BD = \frac{(dx^2 + dy^2)\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-d^2y\,dx}$$

ist, muß man für dy und d^2y den Wert einsetzen. Es ist aber bei der Parabel

$$dy = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax}}, \text{ mithin } dy^2 = \frac{a\,dx^2}{4x},$$

und

$$d^2y = -\frac{a\,dx^2}{4x\sqrt{ax}},$$

also

$$\frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y} = \frac{(a + 4x)\sqrt{ax}}{a} \text{ und } \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \frac{\sqrt{a + 4x}}{\sqrt{4x}},$$

mithin

$$BD = \frac{(a + 4x)\sqrt{a + 4x}}{\sqrt{4a}}.$$

Um aber die Natur der Kurve zu erhalten, auf der der Punkt D liegt, sei nach der Weise *Descartes* $AL = s$, $LD = t$. Weil $EH = \frac{1}{2}a$ ist, wird $BH = \sqrt{ax + \frac{1}{4}a^2}$ sein. Wegen $BH : BE = BD : (BE + LD)$ findet man $LD = 4x\sqrt{ax} : a = t$, und wegen $BH : EH = BD : EL$ gelangt man zu $EL = \frac{1}{2}a + 2x$, mithin $AL = \frac{1}{2}a + 3x = s$. Es sei nun, wie wir oben gesetzt haben (Seite 69), $s = \frac{1}{2}a + r$. Dann wird

$$r = 3x \quad \text{oder} \quad x = \tfrac{1}{3}r$$

und somit

$$\frac{4x\sqrt{ax}}{a} = \frac{4r\sqrt{\frac{1}{3}ar}}{3a} = t.$$

Vereinfacht man die Gleichung, so erhält man

$$16r^3 = 27at^2.$$

Das ist dieselbe Gleichung, die wir oben gefunden haben. Also usw. [43]).

AB sei eine kubische Parabel erster Art, der Parameter $= a$, $AE = x$, $BE = y = \sqrt[3]{a^2x}$. Dann wird sein

$$dy = \frac{adx}{3\sqrt[3]{ax^2}}, \quad dy^2 = \frac{a^2dx^2}{9\sqrt[3]{a^2x^4}}$$

und

$$d^2y = -\frac{2adx^2}{9\sqrt[3]{ax^5}} = -\frac{2adx^2}{9x\sqrt[3]{ax^2}},$$

also

$$\frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y} = \frac{a^2 + 9x\sqrt[3]{a^2x}}{9x\sqrt[3]{a^2x}} : \frac{2a}{9x\sqrt[3]{ax^2}} = \frac{a^2\sqrt[3]{x} + 9x\sqrt[3]{a^2x^2}}{2a\sqrt[3]{a}}$$

und

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 + 9x\sqrt[3]{a^2x}}}{\sqrt{9x\sqrt[3]{a^2x}}}.$$

Mithin ist

$$BD = \frac{a^2\sqrt[3]{x} + 9x\sqrt[3]{a^2x^2}}{2a\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + 9x\sqrt[3]{a^2x}}{9x\sqrt[3]{a^2x}}}.$$

Wenn AB eine Hyperbel ist, der Durchmesser $= a$, der Parameter b, $AE = x$, $EB = y = \sqrt{a^2x + ax^2} : \sqrt{b}$, so wird sein

$$dy = \frac{(a^2 + 2ax)dx}{2\sqrt{a^2bx + abx^2}}, \quad dy^2 = \frac{(a^3 + 4a^2x + 4ax^2)dx^2}{4abx + 4bx^2}$$

und

$$d^2y = -\frac{a^3dx^2}{(4ax + x^2)\sqrt{a^2bx + abx^2}},$$

also

$$\frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y} = \text{usw.}^{44)}$$

AB sei eine Zykloide, *AGH* der erzeugende Kreis, $AE = x$ $EB = y = EG + AG = \sqrt{2ax - x^2} + s$. Dann wird also sein

$$dy = \frac{(a-x)dx}{\sqrt{2ax - x^2}} + ds\left[\frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}}\right] = \frac{(2a-x)dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \frac{dx\sqrt{2a-x}}{\sqrt{x}},$$

$$dy^2 = \frac{(2a-x)dx^2}{x}$$

und

$$d^2y = -\frac{adx^2}{x\sqrt{2ax - x^2}},$$

A B G E H L D

Fig. 55.

mithin

$$\frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y} = 2\sqrt{2ax - x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{x}}$$

und daher

$$BD = 2\sqrt{4a^2 - 2ax} = 2GH = 2BL.$$

Es sei *AB* (Fig. 56) eine gewöhnliche logarithmische Kurve, die Subtangente $EF = a$, $BE = y$, $CE = x$. Nach der Natur der logarithmischen Kurve ist $ydx = ady$, also

$$dy = \frac{ydx}{a} \quad \text{und} \quad d^2y = \frac{dydx}{a} = \frac{ydx^2}{a^2},$$

mithin

$$\frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y} = \frac{a^2 + y^2}{-y} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \frac{\sqrt{a^2 + y^2}}{a},$$

folglich[45])

$$BD = \frac{(a^2 + y^2)\sqrt{a^2 + y^2}}{-ay}.$$

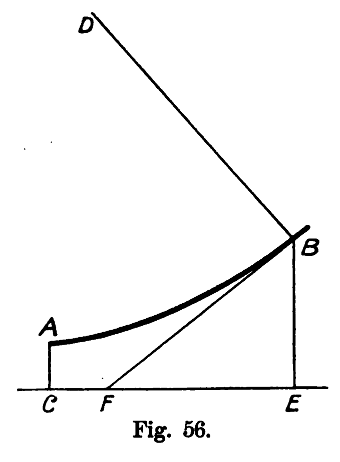


Fig. 56.

Da diese Größe negativ ist, zeigt sie, daß BD nicht gegen die Achse hin zu nehmen ist.

Aus den angeführten Beispielen geht zur Genüge hervor, wie man allgemein bei allen Kurven und überall die Mittelpunkte der oskulierenden Kreise findet. Jetzt soll noch gezeigt werden, wie man auf kurzem Wege den Abstand des Kreises, der die Kurve in einem Scheitel oskuliert, von dem Scheitel finden kann.

AB sei eine gegebene Kurve, AC die Achse, A ein Scheitel. Man beschreibe mit beliebigem Radius AC den Kreis ABE. Offenbar wird dann, wenn der Radius groß genug ist, der Kreis die Kurve irgendwo in B schneiden, während er sie immer noch im Scheitel berührt. Ebenso ist klar, daß bei Annäherung des Mittelpunktes an A auch der Punkt B an A heranrückt. Es ist also ein Mittelpunkt C zu finden derart, daß der Punkt B nach A fällt. Nun sei $AD = x$, $DB = y$, $AC = CB = z$. Dann wird

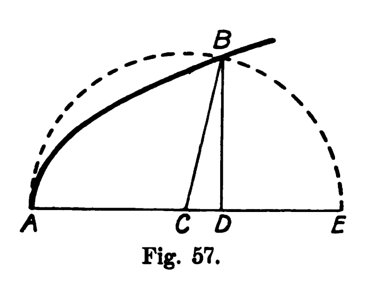


Fig. 57.

$$CD = -z + x$$

und sein Quadrat $CD^2(z^2 - 2zx + x^2)$ vermehrt um $DB^2(y^2)$ gleich $BC^2(z^2)$, d. h.

$$z^2 - 2zx + x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{oder} \quad y^2 + x^2 = 2zx,$$

mithin

$$z = \tfrac{1}{2}x + \frac{y^2}{2x}.$$

Da aber B nach A fallen soll, wird $x = 0$ sein. Es wird also

$$z = \frac{y^2}{2x};$$

in diese Gleichung ist der Wert von y oder von x einzusetzen nach der Natur der Kurve, und dann y oder x gleich Null zu machen. Was dann herauskommt, wird die Größe von z liefern. Wenn z. B. AB eine Parabel ist, wird

$$z = \frac{y^2}{2x} = \frac{ax}{2x} = \tfrac{1}{2}a.$$

Wenn AB eine Hyperbel ist, erhält man für $y^2 : 2x$

$$\frac{2\,ax + x^2}{2x} = a + \tfrac{1}{2}x = a.$$

Dieses Verfahren geht nur bei geometrischen Kurven. Das andere, das folgt, ist allgemein, sowohl für mechanische als für geometrische.

Es sei AB die gegebene Kurve, CB die Ordinate, BD die Senkrechte, $AC = x$, $BC = y$. Dann ist offenbar, wenn $x = 0$ wird, CD der gesuchte Abstand des Mittelpunktes des oskulierenden Kreises. Es ist aber $dx : dy = y : CD$, mithin

$$CD = \frac{ydy}{dx}.$$

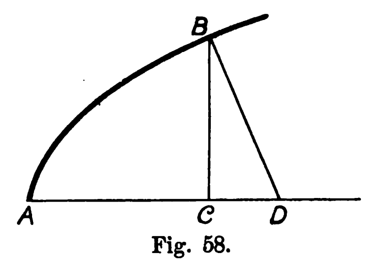


Fig. 58.

Wenn hier für eins sein Wert eingesetzt und das andere gleich Null angenommen wird, so erhält man die Größe CD oder vielmehr AD. Es sei z. B. AB eine Parabel. Dann wird

$$ydy = \tfrac{1}{2}adx \quad \text{und} \quad \frac{ydy}{dx} = \tfrac{1}{2}a = AD.$$

Es sei AB eine Hyperbel. Dann wird

$$ydy = adx + xdx, \text{ mithin } \frac{ydy}{dx} = a + x = a.$$

Achtzehnte Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

Es ist zu bemerken, daß das frühere Verfahren sich ebenfalls auf mechanische Kurven ausdehnt. Man braucht nur, was leicht zu beweisen ist[46], anzunehmen, daß jede Kurve AB (Fig. 59 und 60), falls AC unendlich klein ist, gleich der

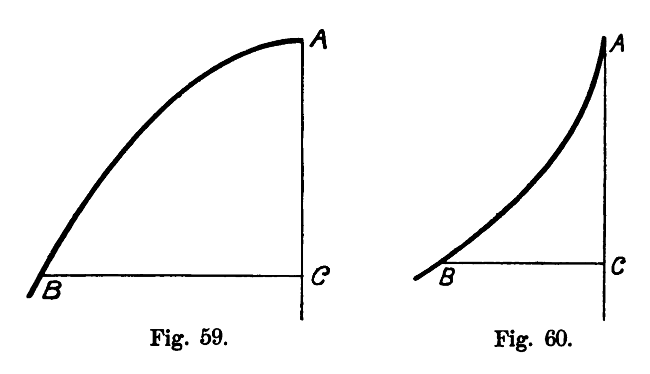


Fig. 59. Fig. 60.

Ordinate BC wird, wenn nämlich AB gegen die Achse konkav ist, und gleich der Abszisse, wenn sie gegen die Achse konvex ist. Vorausgesetzt wird aber dabei, daß die Scheiteltangente entweder senkrecht zur Achse läuft oder die Achse selbst ist, jenes im ersten, dieses im zweiten Falle.

Wenn wir also die Regel auf die Zykloide anwenden wollen, so sei AGE der erzeugende Kreis der Zykloide AB, $AE = a$, $AC = x$, $AG = GB = s$, $CB = y = s + \sqrt{ax - x^2}$. Weil nun, wenn man $AC = 0$ nimmt,

$$AD = \frac{y^2}{2x}$$

ist, so muß man für y^2 seinen Wert

$$y^2 = s^2 + ax - x^2 + 2s\sqrt{ax - x^2}$$
$$= (\text{wegen } AG = GC)\ 2ax - 2x^2 + 2ax - 2x^2 = 4ax - 4x^2$$

einsetzen und erhält

$$\frac{y^2}{2x} = 2a - 2x =$$
$$= (\text{wegen } x = 0)\ 2a =$$
$$= 2AE.$$

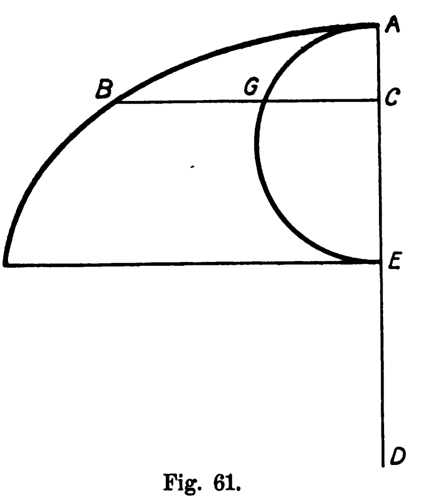


Fig. 61.

In dieser Weise hat man auch bei den andern mechanischen Kurven zu verfahren.

Inzwischen verdient es beachtet zu werden, daß diese Regel sich zu einer ganz allgemeinen machen läßt, d. h. daß man mit ihrer Hilfe bei allen Kurven, sowohl den mechanischen als auch den geometrischen, in jedem gegebenen Punkte den Mittelpunkt des oskulierenden Kreises finden kann, wenn auch ein wenig umständlicher als durch die Differentialmethode. Die Kurve AB sei gegeben und auf ihr ein Punkt B. Es soll der Kreis beschrieben werden, der die Kurve in diesem Punkte oskuliert. Man ziehe BD senkrecht zur Kurve AB. Weil nun der Mittelpunkt des oskulierenden Kreises auf der Geraden BD liegen muß, so kann man BA so wie eine Kurve betrachten, deren Scheitel[47]) B ist, deren Achse BD und deren Ordinate CE, die auf der Achse BD senkrecht steht. Aus der gegebenen Natur der Kurve ist dann die Beziehung zwischen BE als Abszisse und CE als Ordinate zu ermitteln. Darauf muß man

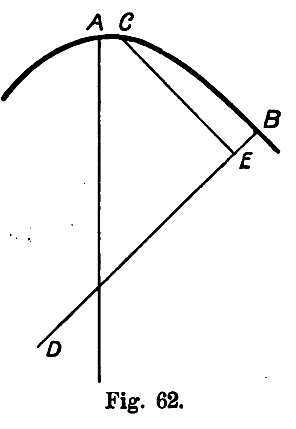


Fig. 62.

$BD = y^2 : 2x$ machen, d. h. gleich CE^2 dividiert durch das doppelte BE. Wenn BE unendlich klein ist, so wird BD der Radius des gesuchten oskulierenden Kreises sein[48]).

Bisher ist gezeigt worden, auf welche Weise bei gegebenen Kurven die Mittelpunkte der oskulierenden Kreise zu finden sind, oder welches die Natur der Kurve ist, auf der diese Mittelpunkte liegen, d. h. welches die Kurve ist, die durch ihre Abwicklung die gegebene Kurve beschreibt. Hierbei haben wir dargetan, daß an jeder geometrischen Kurve die Mittelpunkte der oskulierenden Kreise ebenfalls eine geometrische Kurve bilden, und zwar eine einzige und rektifizierbare, deren Länge nämlich dem Radius des oskulierenden Kreises gleichkommt oder davon um eine gegebene Größe abweicht.

Jetzt soll die Kurve der oskulierenden Mittelpunkte gegeben sein, und die Kurve selbst gesucht werden, die von Kreisen mit jenen Mittelpunkten oskuliert wird. Oder es ist, was dasselbe bedeutet, eine Kurve gegeben und eine andere gesucht, die durch die Abwicklung der ersten erzeugt wird. Bevor wir zur Lösung schreiten, ist zunächst zu bemerken, daß, wenn auch die gegebene Kurve eine geometrische ist, trotzdem die durch ihre Abwicklung beschriebene nicht immer, ja sogar sehr selten eine geometrische wird, nämlich nur dann, wenn die gegebene Kurve rektifizierbar ist[49]). Man muß auch wissen, daß dieses Problem unendlich viele Lösungen zuläßt; je nachdem nämlich der Anfang der Abwicklung auf der gegebenen Kurve gewählt wird, wird sich immer die Natur der erzeugten Kurve nach dieser Variation ändern. Es sei in der Tat $ABCD$ die gegebene Kurve, auf der man sich einen Faden angebracht denkt, dessen eines Ende in D befestigt ist, während das

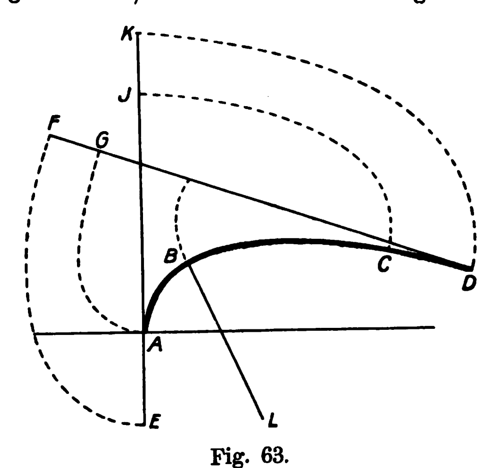


Fig. 63.

andere über den Scheitel A hinaus bis nach E gespannt wird. Wenn man sich nun vorstellt, daß der Faden abgewickelt wird, so wird der Punkt E die Kurve EF beschreiben, und der Punkt A die Kurve AG. Beide Kurven werden von verschiedener Natur sein. Der Mittelpunkt des Kreises, der die Kurve EF in E oskuliert, ist nämlich von E selbst verschieden; dagegen ist der Mittelpunkt des die Kurve AG in A oskulierenden Kreises von A nicht verschieden, sondern liegt im Scheitel selbst. Ebenso beschreibt in derselben Zeit jeder Zwischenpunkt B eine besondere Kurve BH. Es sei jetzt das Fadenende A fest und das andere D beweglich. Dann werden offenbar, wenn die Kurve $ABCD$ nicht von beiden Seiten eine ähnliche Lage hat, der Punkt D und alle Zwischenpunkte C, oder die jenseits des Scheitels gewählten, Kurven DK, CJ beschreiben, die sowohl unter sich als auch von den früheren EF, AG, BH verschieden sind.

Da dies sich so verhält, so werden wir nur nach der Natur der Kurven EF und AG fragen, d. h. jener, die von einem Punkte jenseits des Scheitels und vom Scheitel selbst beschrieben werden. Die Natur der übrigen BH wird nämlich auf ganz ähnliche Weise gefunden, indem man B als Scheitel der Kurve BCD betrachtet und die Senkrechte BL der Kurve als eine Achse, wie es bei den früheren geschehen ist.

Es sei also AB (Fig. 64) die gegebene Kurve, A der Scheitel, AC die Achse. Auf der Kurve AB ist ein Faden angebracht, dessen Ende über den Scheitel hinaus bis D gespannt wird. Dieser Punkt beschreibt durch Abwicklung die Kurve DE. Es wird die Natur dieser Kurve gesucht.

Man verlängere CA und DA und fälle die Senkrechten EG, EH. Es sei $AD = b$, $AB = s$, $AC = x$, $CB = y$, $DH = r$, $HE = t$. Verlängert man EH bis L, so ist

$$ds(\sqrt{dx^2 + dy^2}) : dx = \overline{s + b}\,(EB) : EL.$$

Man findet also

$$EL = \frac{(s + b)dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

und

$$EH = \frac{(s + b)dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - x = t.$$

Wegen $ds : dy = BE : BL$ findet man

$$BL = \frac{(s+b)dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

mithin

$$CL = AH = y - \frac{(s+b)dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

und

$$DH = b + y - \frac{(s+b)dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = r.$$

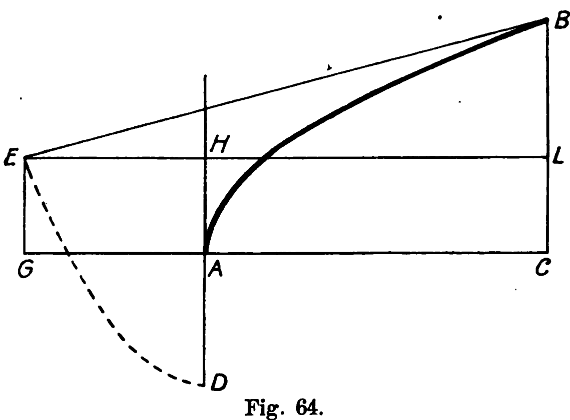


Fig. 64.

Ist $AD = o$, d. h. beginnt die Abwicklung in A, so muß $b = o$ gesetzt werden, und dann kommt heraus

$$r = y - \frac{s\,dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \text{ und } t = \frac{s\,dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - x.$$

Wenn man überall den Wert von dy oder dx einsetzt, nach der Natur der gegebenen Kurve AB, so erhält man zwar die Natur der Kurve DE ohne Differentiale. Es kommt aber immer s vor, was darauf hinweist, daß die Natur der Kurve DE von der Rektifikation der Kurve AB abhängt.

Neunzehnte Vorlesung.

Auffindung der durch Abwicklung einer kubischen Parabel zweiter Art beschriebenen Kurven.

Um das Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern, werden wir die kubische Parabel zweiter Art AB vorführen, bei der

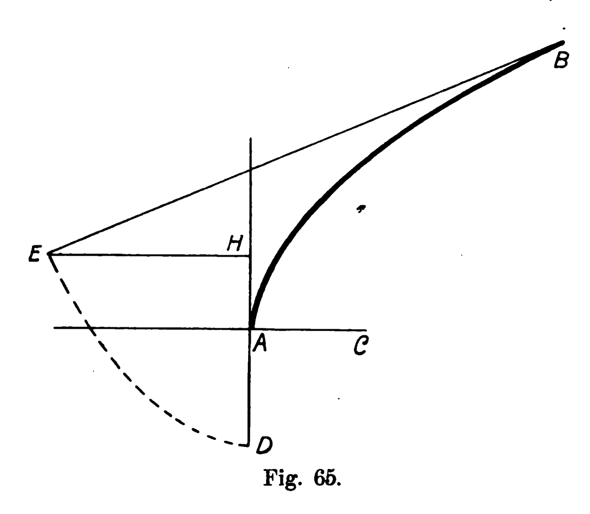


Fig. 65.

die Abszisse $= x$, die Ordinate $= y$, der Parameter $= a$, $AD = b$ ist. Die Gleichung für diese Parabel lautet

$$ax^2 = y^3$$

Da zur Bestimmung der Kurve DE die Länge der Kurve AB, die s ist, gehört, so muß sie also vor allem rektifiziert werden, was auf gewöhnlichem Wege in folgender Weise durchgeführt wird. Man nehme die Quadrate von dx und dy, nachdem man für eins seinen Wert eingesetzt hat, und suche das Integral aus der Wurzel ihrer Summe. Dies wird die Rektifikation der Kurve AB liefern. Es ist jedoch zu beachten [wie wir oben gezeigt haben], daß manchmal der wahre Wert nicht herauskommt, sondern irgend eine gegebene Größe fortzunehmen oder hinzuzufügen ist, die man aus der Annahme x oder $y = o$ findet.

Da nun $ax^2 = y^3$ ist, so wird sein

$$x = \sqrt{\frac{y^3}{a}} \text{ und } dx = \frac{3y\,dy}{2\sqrt{ay}}, \text{ mithin } dx^2 = \frac{9y\,dy^2}{4a}.$$

Addiert man dy^2, so erhält man

$$\frac{(9y + 4a)dy^2}{4a} = ds^2,$$

also

$$ds = \frac{dy \cdot \sqrt{9y + 4a}}{\sqrt{4a}}$$

und das Integral hiervon

$$(\tfrac{2}{3}y + \tfrac{8}{27}a)\sqrt{\frac{9y + 4a}{4a}} = s.$$

Weil aber bei der Annahme $y = o$ herauskommt $\frac{8}{27}a = s$, so ist das ein Zeichen, daß man von der gefundenen Größe $\frac{8}{27}a$ abziehen muß. Man hat also

$$(\tfrac{2}{3}y + \tfrac{8}{27}a)\sqrt{\frac{9y + 4a}{4a}} - \tfrac{8}{27}a = s.$$

Um nun zur Natur der Kurve DE zu gelangen, muß EH und DH gesucht werden, d. h. t und r. Oben haben wir aber gefunden (vgl. S. 81 und 82)

$$t = \frac{(s + b)dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - x \text{ und } r = b + y - \frac{(s + b)dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Man setze beidemal den Wert von s, x und dx ein. Dann wird man finden[50])

$$t = \left\{\tfrac{2}{9}\sqrt{9y^2 + 4ay} - \tfrac{4}{9}\sqrt{ay} + \tfrac{3}{2}b\sqrt{\frac{y}{a}}\right\}\sqrt{\frac{4a}{9y + 4a}},$$

$$r = b + \tfrac{1}{3}y - \tfrac{8}{27}a + (\tfrac{8}{27}a - b)\sqrt{\frac{4a}{9y + 4a}}.$$

Aus diesen Gleichungen ist klar, daß die Kurve DE sehr kompliziert ist, und zwar mehr oder weniger, je nachdem AD gewählt wird. Wenn nämlich AD, d. h. b, $= \frac{8}{27}a$ ist, so kommt heraus[51]):

$$t = \tfrac{4}{9}\sqrt{ay} \text{ und } r = \tfrac{1}{3}y.$$

Wünscht man daher die Gleichung zu finden, die die Natur der Kurve DE in den Buchstaben t und r ausdrückt, so muß man den Wert von y aus der einen in die andere Gleichung einsetzen. Da nämlich $r = \frac{1}{3}y$ ist, so wird $y = 3r$ sein, mithin

$$t = \tfrac{4}{9}\sqrt{ay} = \tfrac{4}{9}\sqrt{3ar}.$$

Hieraus läßt sich die Gleichung

$$16ar = 27t^2$$

bilden. Sie zeigt, daß die Kurve DE eine Parabel mit dem Parameter $\frac{16}{27}a$ ist, wenn $b = \frac{8}{27}a$. Dies ist der einzige Fall, wo die Kurve DE so einfach wird. In allen andern Fällen und sogar bei der Annahme $b = o$ [ein Fall, der nächst dem vorigen der einfachste zu sein scheint] zeigen sich die Größen t und r ziemlich kompliziert, wodurch bewirkt wird, daß auch die Kurve DE mehr oder weniger kompliziert wird.

Über die Rektifikation der Kurven mittels ihrer Abwicklung.

Der bequemste Weg zur Rektifikation der Kurven ist, wie wir eben angedeutet haben, der, daß man das Integral aus der Quadratwurzel der Quadratsumme von dx und dy nimmt. Diese Methode läßt sich aber nur bei solchen Kurven bequem anwenden, deren Natur durch eine Relation der Ordinaten zu den Abszissen gegeben ist. Bei andern, deren Natur durch Eigenschaften bekannt wird, kann man sie schwerlich brauchen. Dagegen kann man das Verfahren die Kurven durch Abwicklung zu rektifizieren, gewissermaßen als allgemein bezeichnen, und es führt bei gewissen Beispielen weit leichter zur Kenntnis der Kurvenlänge als das gewöhnliche Verfahren. Freilich läßt sich nicht leugnen, daß es manchmal, wenn man eine kurze und leicht auflösbare Gleichung haben kann, die die Beziehung der Ordinate zur Abszisse ausdrückt, besser ist, das gewöhnliche anzuwenden.

Das Verfahren mittels der Abwicklung ist folgendes: ABC (Fig. 66) sei die gegebene Kurve, deren Länge gesucht wird. Man denke sich, daß der Punkt A bei der Abwicklung die Kurve AD beschreibt. Dann ist nach dem vorhin Gesagten klar, daß der Faden CD überall eine Tangente der Kurve ABC ist, ebenso, daß CD ihr gleich ist. Die Tangente CE ist aber gegeben. Es bleibt also noch übrig, die Strecke ED zu finden. Wenn

man sie kennt und von der Tangente EC fortnimmt, so bleibt übrig $DC =$ der gesuchten Kurve AC. Die Strecke ED wird aber auf folgende Weise gefunden. Man ziehe eine Tangente GB, die von der früheren EC um eine unendlich kleine Größe entfernt ist, und beschreibe um den Mittelpunkt C den kleinen

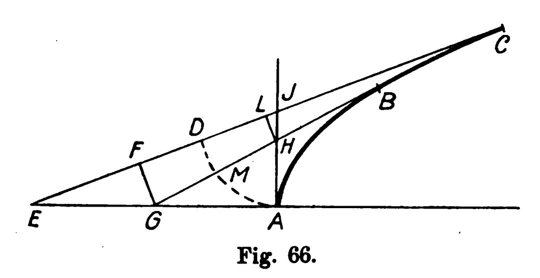


Fig. 66.

Kreisbogen GF. Man kann dann das Dreieck EFG als ein rechtwinkliges ansehen. Da aber $FD = GM$ ist, so wird EF das Differential von ED sein. Man ziehe nun AJ senkrecht zu EA. Dann sind, weil die Kurve gegeben ist, EJ und EA gegeben. Es sei also $EJ = r$ und $EA = t$, mithin $EG = dt$. Da $EJ : EA = EG : EF$, d. h. $r : t = dt : EF$, so ist

$$EF = \frac{t\,dt}{r}.$$

Hiervon nehme man, wenn es geschehen kann, das Integral. Dies wird gleich der Strecke ED sein, die von der Tangente EC abgezogen $DC = AC$ übrig läßt.

Manchmal findet man CD oder AC bequemer durch Addition eines gewissen Integrals. Es ist nämlich $CD = CJ + JD$. Es ist aber CJ etwas Gegebenes. Daher bleibt nur übrig, daß man JD findet, was auf folgende Weise geht. Nach Ziehung des kleinen Bogens HL wird $DL = MH$ sein. Mithin ist LJ das Differential von DJ. Es sei also $EJ = r$ und $AJ = t$, mithin $HJ = dt$, und man setze an $EJ : AJ = HJ : LJ$. Dann findet man

$$LJ = \frac{t\,dt}{r},$$

und das Integral hiervon liefert die Strecke DJ. Addiert man zu ihr die Strecke CJ, so erhält man $CD =$ der gesuchten Kurve AC.

Nebenbei ist hier zu bemerken, daß die Abwicklung der Kurven auch zur Ausmessung von Flächen dienen kann. Das Differential der krummlinigen Fläche ACE ist nämlich das Dreieck GCE, das man findet, indem man FG aus den ähnlichen Dreiecken EGF und EJA ermittelt und dieses FG mit der Hälfte von EC multipliziert. Ebenso liefert LH multipliziert mit der Hälfte von JC das Differential der krummlinigen Fläche AJC.

AC sei eine kubische Parabel zweiter Art, $AB=x$, $BC=y$, der Parameter $=a$, also $ax^2=y^3$. Dann wird sein

$$AE=\tfrac{1}{2}x=t,\quad AJ=\tfrac{1}{3}BC=\tfrac{1}{3}y,\quad EJ=\sqrt{\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{9}y^2}=r.$$

Da aber

$$x=\sqrt{\frac{y^3}{a}}$$

ist, so wird

$$dt=\tfrac{3}{4}\frac{y\,dy}{\sqrt{ay}},$$

Fig. 67.

mithin

$$\frac{t\,dt}{r}=\frac{3y^2dy}{8a\sqrt{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2}}=\frac{3y\,dy}{8a\sqrt{\frac{1}{4}\frac{y}{a}+\frac{1}{9}}}=\frac{3y\,dy}{8\sqrt{\frac{1}{4}ay+\frac{1}{9}a^2}}.$$

Das Integral hiervon wird gefunden, indem man

$$\tfrac{1}{4}ay+\tfrac{1}{9}a^2=z^2$$

setzt. Es wird nämlich gleich[52])

$$\frac{4z^3}{a^2}-\tfrac{4}{3}z.$$

Zieht man dies von EC ab, so bleibt $DC=AC$ übrig.

AC (Fig. 68) sei eine Zykloide, ADE der erzeugende Kreis, $AE=2a$, $AF=x$, der Bogen $AD=s=CD=AG$, die Strecke $DA=\sqrt{2ax}=CG$. Da $AD:DF=GH:GJ$, d. h.

$$\sqrt{2ax}:\sqrt{2ax-x^2}=\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}(ds):GJ,$$

so wird

$$GJ = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax}}.$$

Das Integral hiervon $\sqrt{2ax}$ ist gleich GL. Nun ist aber $\sqrt{2ax} = AD = CG$, und daher $CG + GL$ oder das Doppelte von CG gleich der Kurve AC. Zur Ausmessung der krummlinigen Fläche AGC setze man an AD: $AF = GH : HJ$. Danach wird

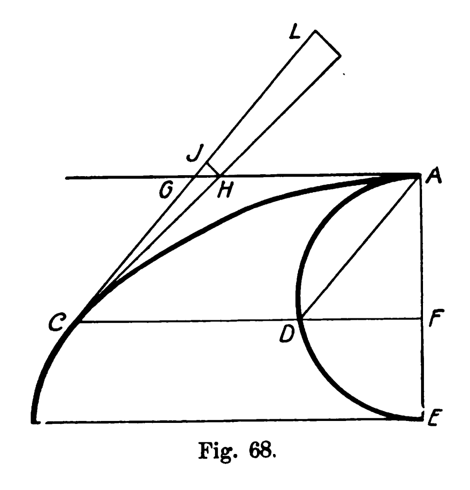


Fig. 68.

$$HJ = \frac{a\,dx}{\sqrt{4a^2 - 2ax}}.$$

Multipliziert man mit $\frac{1}{2}CH$, so kommt heraus

$$\tfrac{1}{2}a\,dx \cdot \sqrt{\frac{x}{2a - x}}.$$

Dies ist aber gleich dem Differential des Segmentes AD, folglich die krummlinige Fläche AGC gleich dem Segment AD.

Zwanzigste Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

Durch das Beispiel, das jetzt folgt, wird klar werden, wie man das Ausmaß der Flächen und Kurven findet, und zwar nicht der gegebenen, sondern derjenigen, die durch die Abwicklung dieser beschrieben werden.

ABE sei ein Kreis, durch dessen Abwicklung die Kurve AHF beschrieben wird. A ist der Anfang, F das Ende der Kurve. Es wird das Ausmaß eines Kurvenstückes AH gesucht und seine Fläche $ACHA$.

Man bemerke, daß die Kurve $AHJF$ eine Art Spirale ist, ebenso, daß die Strecke AF zwischen Anfang und Ende gleich

der Kreisperipherie und senkrecht zur Kurve in den Punkten A und F. Es sei jetzt GH das Differential der Kurve AH, man ziehe die Tangenten HC, GB und die Radien CD, BD. Dann werden HC, GB senkrecht zur Kurve AH sein und gleich den Bogen AC, AB, die ich s nenne, so daß $BC = ds$ ist. Da nun Winkel $GBD = BCD + BDC$ ist und zugleich $GBD = HCD$, weil beides Rechte sind, so wird $HCG = BDC$ sein, folglich das Dreieck BDC ähnlich dem Dreieck HCG, mithin $DC : HC = BC : GH$, d. h. $a : s = ds : GH$, also

$$GH = \frac{s\,ds}{a}.$$

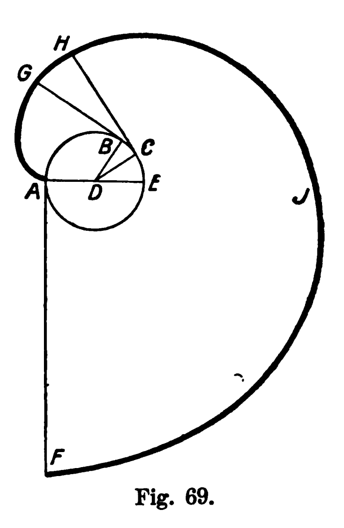


Fig. 69.

Das Integral hiervon $\frac{s^2}{2a}$ ist gleich der Kurve AH. Hieraus geht hervor, daß AH die dritte Proportionale zu dem Durchmesser AE und dem Bogen AC ist, und daher die ganze Kurve $AHJF$ die dritte Proportionale zu AE und AF.

Zur Ausmessung der Fläche $ACHA$ multipliziere man $\frac{1}{2}CH$ mit GH. Dann kommt heraus

$$\frac{s^2 ds}{2a} = \text{Differential der Fläche } ACH,$$

d. h. gleich dem Dreieck GCH. Das Integral hiervon $\frac{s^3}{6a}$ ist gleich der Fläche $ACHA$. Daher ist die ganze Fläche $AHJFAECA$ gleich dem dritten Teil des mit dem Radius AF beschriebenen Kreises, die Kurve $AHJF$ aber gleich dem halben Umfang desselben Kreises.

Die Kurve, die wir jetzt beifügen, zeigt, daß es viel leichter ist, mit Hilfe der Abwicklung ihre Rektifikation zu finden und ihre Fläche einem Kreise zu vergleichen als nach dem gewöhnlichen Verfahren. Das Problem ist aber folgendes. Gegeben ist ein rechter Winkel CAB, dessen zwei Schenkel AC, AB unbegrenzt verlängert sind. Auf ihnen liegt ein Lineal oder eine

bewegliche gegebene Strecke DE, deren beide Endpunkte D, E sich auf den Schenkeln AC, AB bewegen. Gesucht wird die Natur der Kurve CFB, die von dem Lineal DE in jeder seiner Lagen berührt wird, ebenso die Rektifikation derselben und das Ausmaß der Fläche FEB.

Fig. 70.

Lösung. Um die Natur der Kurve zu erhalten, muß man die Länge EF suchen, d. h. die Entfernung des Berührungspunktes von einem der Endpunkte E. Da aber der Berührungspunkt irgend einer Kurve und Geraden in dem Schnittpunkte liegt, in welchem sich zwei um eine unendlich kleine Größe voneinander entfernte Tangenten treffen, so muß also der Punkt F gesucht werden, in welchem sich die beiden gleichen Strecken DE, de schneiden (vorausgesetzt, daß Dd das Differential von AD ist). Dieser Punkt wird aber so gefunden. Man ziehe EH parallel zu AC, und es sei DE oder $de = a$, $AE = x$. Dann wird sein $AD = \sqrt{a^2 - x^2}$, $Ee = dx$, $Dd = xdx : \sqrt{a^2 - x^2}$. Da nun $eA : Ad = eE : EH$ ist, so wird $EH = dx\sqrt{a^2 - x^2} : x$. Es ist aber $EH : dD = EF : FD$ und, wenn man zusammensetzt, $(EH + dD) : EH = ED : EF$, d. h.

$$\frac{a^2 dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} : \frac{dx\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = a : EF.$$

Daher wird

$$EF = \frac{a^2 - x^2}{a},$$

mithin

$$DF = a - \frac{a^2 - x^2}{a} = \frac{x^2}{a}.$$

Hiernach läßt sich die Kurve CBF leicht in folgender Weise konstruieren. Man ziehe in dem rechten Winkel irgendwie

eine Strecke $DE = a$ und nehme DF gleich der dritten Proportionalen zu DE und AE. Dann wird der Punkt F auf der gesuchten Kurve CFB liegen. Hieraus folgt, daß AB und AC, bis zu den Enden der Kurve gezogen, gleich der gegebenen Strecke DE sind.

Wenn wir die Natur der Kurve CFB nach der *Descartes*schen Weise finden wollen, so werde die Senkrechte FK gefällt, und es sei $AK = r$, $KF = t$. Da $DE : DA = FE : FK$ ist, so findet man

$$FK = \frac{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2} = t,$$

und da $DE : AE = DF : AK$ ist, so findet man[53])

$$AK = \frac{x^3}{a^2} = r.$$

Nach der vorigen Gleichung ist

$$(a^2 - x^2)^3 = a^4 t^2,$$

mithin

$$a^2 - x^2 = a\sqrt[3]{at^2}$$

und daher

$$x = \sqrt{a^2 - a\sqrt[3]{at^2}} \text{ und } x^3 = \sqrt{\left(a^2 - a\sqrt[3]{at^2}\right)^3} = a^2 r,$$

nach der andern Gleichung. Es ist also

$$\left(a^2 - a\sqrt[3]{at^2}\right)^3 = a^4 r^2 \text{ und } a^2 - a\sqrt[3]{at^2} = a\sqrt[3]{ar^2}$$

oder

$$a = \sqrt[3]{at^2} + \sqrt[3]{ar^2}.$$

Nimmt man die Kuben, so ergibt sich

$$a^3 = at^2 + 3at\sqrt[3]{r^2 t} + 3ar\sqrt[3]{rt^2} + ar^2 =$$
$$= at^2 + 3a\sqrt[3]{a^2 t^2 r^2} + ar^2.$$

Nach Reduktion der Gleichung erhält man

$$a^2 - t^2 - r^2 = 3\sqrt[3]{a^2 t^2 r^2}.$$

Nimmt man die Kuben und reduziert die Gleichung auf Null, so wird sein:

$$\left.\begin{matrix} r^6 - 3a^2 \\ + 3t^2 \end{matrix}\right\} r^4 + \left.\begin{matrix} 3a^4 \\ + 21a^2t^2 \\ + 3t^4 \end{matrix}\right\} r^2 - \left.\begin{matrix} a^6 \\ + 3a^4t^2 \\ - 3a^2t^4 \\ + t^6 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Wollte man mit Hilfe dieser Gleichung die Rektifikation der Kurve CFB nach der gewöhnlichen Methode herausfinden, so wäre dies sehr schwer, ja fast unmöglich, weil die Gleichung der Kurve sehr zusammengesetzt ist[54]).

Einundzwanzigste Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

So schwer es ist, die Rektifikation der Kurve CFB mit Hilfe der erhaltenen Gleichung von sechs geraden Dimensionen zu finden, so leicht ergibt sie sich dagegen mittels Abwicklung der Kurve. Es sei in der Tat BNM (vgl. Fig. 70) die Kurve, die bei der Abwicklung von CFB beschrieben wird, AB oder AC oder $DE = a$, $BE = x$. Dann wird sein $AE = a - x$, mithin $FE = (2ax - x^2) : a$, $AD = \sqrt{2ax - x^2}$ und $Ee = dx$. Da nun $DE : AE = Ee : EL$, d. h. $a : (a - x) = dx : EL$, so ist

$$EL = \frac{adx - xdx}{a},$$

und das Integral hiervon

$$\frac{ax - \frac{1}{2}x^2}{a} = EN.$$

Addiert man $FE = (2ax - x^2) : a$, so kommt heraus

$$\frac{3ax - \frac{3}{2}x^2}{a} = FN = \text{der Kurve } FB.$$

Es ist aber

$$\frac{2ax - x^2}{a} : \frac{3ax - \frac{3}{2}x^2}{a} = 2 : 3.$$

Daher wird auch

$$FE : FB = 2 : 3$$

sein. Hieraus läßt sich sogar das Verhältnis der Fläche FEB zur Fläche FBN entnehmen. Da nämlich (FE oder FL) $: FN = 2 : 3$ ist, so wird das Dreieck FLe sich zu dem Dreieck FNO verhalten wie 4 zu 9, mithin alle Dreiecke zu allen Dreiecken,

d. h. die Fläche *FEB* zur Fläche *FBN* ebenfalls wie 4 zu 9. Es ist auch $DE : AD = Ee : eL$, d. h. $a : \sqrt{2az - z^2} = dz : eL$, also

$$eL = \frac{dz \cdot \sqrt{2az - z^2}}{a};$$

multipliziert man mit $\frac{1}{2} FE$, so erhält man

$$\frac{(2az - z^2) \cdot dz \cdot \sqrt{2az - z^2}}{2a^2} = \text{Dreieck } FEe.$$

Das Integral hiervon hängt aber [wie aus dem, was oben über die Berechnung der Integrale gesagt wurde, hervorgeht] von der Quadratur des Kreises ab. Es läßt sich also eine Kreisfläche finden, die der Fläche *FEB* gleich ist. Außerdem hat man $FL : FN = Le : NO$, d. h. $2 : 3 = \frac{dz\sqrt{2az - z^2}}{a} : NO$, also

$$NO = \frac{3dz \cdot \sqrt{2az - z^2}}{2a}.$$

Daher ist, wenn man mit dem Radius *AB* den Kreis *BPQ* beschreibt, das Segment *BPE* dividiert durch $\frac{2}{3} AB$ gleich der Kurve *BN*.

Korollar I. Die ganze Kurve *CFB* ist gleich $\frac{3}{2} CA$, oder die Kurve steht im Verhältnis von 3 zu 2 zu ihrer Erzeugenden *DE*.

Korollar II. Die Fläche *CFBA* verhält sich zur Fläche *ABNM* wie 4 zu 9.

Korollar III. Die Kurve *BNM* ist aber gleich $\frac{3}{4}$ von dem Kreisbogen *BPQ*.

Korollar IV. Offenbar ist die Kurve *CFB* die, die wir oben (vgl. Seite 47) nach der umgekehrten Tangentenmethode gesucht haben, als nämlich gefordert war, die Kurve sollte überall zur Tangente in demselben Verhältnis stehen, wie hier im Verhältnis 3 zu 2.

Über die Zykloiden, ihre Rektifikation, Flächenausmessung und ihre Abwicklung.

Die Betrachtung der zykloidalen Kurven fordert nicht mit Unrecht hier einen Platz; denn durch die Abwicklung werden ihre hauptsächlichsten Eigenschaften aufgedeckt. Herr *Huygens*

hat bei der gewöhnlichen Zykloide gezeigt, die von einem Peripheriepunkte eines auf einer Geraden rollenden Kreises beschrieben wird, daß die Abwicklung dieser Zykloide dieselbe Zykloide erzeugt[55]). Er war darüber im Zweifel, ob es andere Kurven gibt, die durch ihre Abwicklung Kurven beschreiben, die ihnen selbst ähnlich sind. Dies zeigte Herr von *Tschirnhaus* bei seiner Kaustik, indem er zugleich nachwies, daß sie eine Zykloide ist[56]). Hier werden wir aber dartun, daß nicht allein die gewöhnliche Zykloide des *Huygens* und die Kaustik des *Tschirnhaus* sich dieser Eigenschaft erfreuen, sondern daß alle möglichen Zykloiden, so viele ihrer denkbar sind, durch ihre Abwicklung ähnliche Zykloiden beschreiben. Daran wird noch eine andere Kurve aus dem Geschlecht der Spiralen geknüpft werden, deren Abwicklung nicht allein eine mit ihr selbst ähnliche, sondern ganz dieselbe Spirale erzeugt.

Vor allem müssen wir zusehen, was eine zykloidale Kurve ist. Man kann sie definieren als eine Kurve, die ein Peripheriepunkt eines Kreises liefert, der auf einem andern, unbeweglichen Kreise rollt. ABC sei der unbewegliche Kreis, auf dessen Peripherie eine andere Kreisperipherie BDE gewälzt wird. Irgend ein Punkt D, der auf dieser Peripherie gewählt ist, wird die Kurve ADC beschreiben, die eine Zykloide genannt wird. Dabei ist sofort klar, daß, wenn der Kreis ABC unendlich ist, die Peripherie ABC eine gerade Linie, also die Kurve ADC eine gewöhnliche *Huygens*sche Zykloide wird. Was daher allgemein für alle Zykloiden bewiesen wird, gilt dann in gleicher Weise für die gewöhnliche.

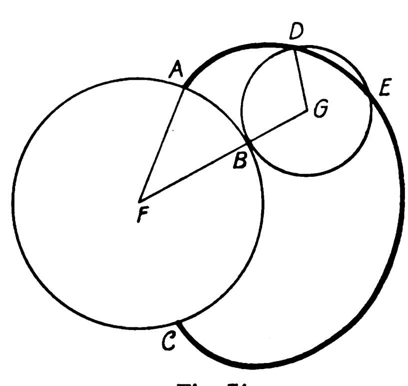


Fig. 71.

Aus der Erzeugung der Kurve geht auch hervor, daß der Bogen AB zwischen dem Anfangspunkt A der Kurve und dem Berührungspunkt B des Kreises BDE in irgend einer Lage gleich ist dem Bogen BD zwischen demselben Berührungspunkt und dem gewählten Punkte D. Wenn sich nämlich der

Kreis *BDE* wälzt, so mißt der Bogen *BD* den Bogen *AB*. Ist also der Anfangspunkt *A* und der Bogen *AB* gegeben und läßt sich der Punkt *D* geometrisch finden, d. h. läßt sich bei gegebenem Anfangspunkt *A* und Bogen *AB* geometrisch ein dem Bogen *AB* gleicher Bogen *BD* abschneiden, so wird die Zykloide *ADC* eine geometrische Kurve sein. Kann man dagegen zu dem Bogen *AB* einen ihm gleichen Bogen *BD* geometrisch nicht finden, so wird die Zykloide *ADC* eine mechanische Kurve sein. Ich werde aber zeigen, daß es bei manchen Zykloiden möglich ist, einen dem Bogen *AB* gleichen *BD* abzuschneiden, bei manchen jedoch unmöglich. Damit wird also zugleich gezeigt sein, daß einige Zykloiden geometrische, einige jedoch mechanische Kurven sind. Dies hat, soviel ich weiß, bisher niemand bemerkt. Ich behaupte nun folgendes. Wenn die Kreise *ABC* und *BDE* von solcher Art sind, daß der Radius *FB* sich zu dem Radius *GB* verhält wie eine Zahl zu einer Zahl[57]), d. h. wenn sie ein durch Zahlen ausdrückbares Verhältnis haben, so behaupte ich, daß die Zykloide *ADC* eine geometrische Kurve ist. Hat dagegen der Radius *FB* zu dem Radius *GB* ein durch Zahlen nicht ausdrückbares Verhältnis, so wird die Zykloide *ADC* eine mechanische Kurve sein. Das erstere wird so bewiesen: Wenn zu

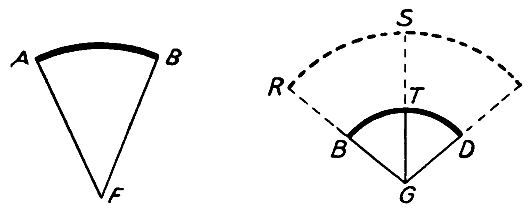


Fig. 72.

dem gegebenen Bogen *AB* ein gleicher *BD* genommen werden soll, so verlängere man *GB* bis *R*, so daß $GR = FA$ ist. Macht man nun Winkel $RGS =$ Winkel *AFB*, so wird *BT* ein gegebener Bogen sein. Richtet man es daher so ein, daß sich der Bogen *BT* zum Bogen *BD* verhält wie *GB* zu *FA*, so wird Bogen $BD =$ Bogen *AB* sein. Denn es ist $BD : BT =$ $= AF : BG = RG : BG = RS : BT = AB : BT$, folglich $AB = BD$. Es bleibt also noch zu beweisen, daß man geometrisch einen Bogen *BD* finden kann, der sich zu dem

gegebenen BT wie AF zu BG verhält, d. h. wie eine Zahl zu einer Zahl.

Wenn AF ein Vielfaches von BG ist, versteht sich die Sache von selbst. Man muß dann nämlich BT so oft nehmen, als BG in AF enthalten ist. Ist aber AF kein Vielfaches von BG, sondern steht es zu ihm in irgend einem Verhältnis, wie z. B. 13 zu 5, so muß man offenbar den Bogen BT doppelt nehmen und dann noch drei Fünftel von ihm. Die Sache kommt also darauf zurück, daß der gegebene Bogen BT in fünf gleiche Teile geteilt wird, von denen drei zu nehmen und zu dem doppe ten Bogen zu addieren sind. Es ist aber bekannt, daß ein gegebener Bogen oder, was dasselbe ist, ein gegebener Winkel geometrisch in so viele gleiche Teile geteilt werden kann, als man wünscht. Man wird nämlich immer zu einer geometrischen Gleichung gelangen, die der Teilung des Winkels entspricht[58].

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

Wir haben also gezeigt, daß, so oft der Radius des unbeweglichen Kreises zum Radius des erzeugenden ein Verhältnis hat wie eine Zahl zu einer Zahl, die erzeugte Zykloide immer eine geometrische Kurve ist. Daß sie aber eine mechanische Kurve ist, wenn die Radien inkommensurabel sind, d. h. wenn das Verhältnis der Radien nicht durch Zahlen ausgedrückt werden kann, wird folgendermaßen bewiesen.

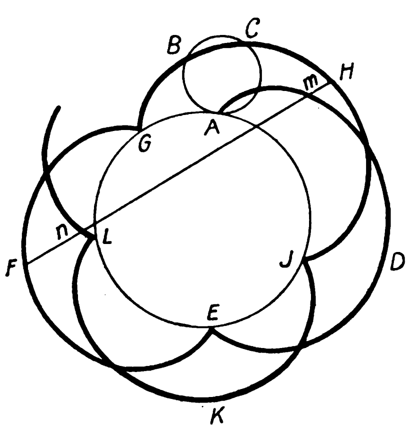


Fig. 73.

Jede solche Kurve, sie mag eine geometrische oder eine mechanische sein, kehrt entweder in sich zurück oder läuft unbegrenzt fort, da die Erzeugung der Kurve immer fortgesetzt

werden kann. Wenn nun der erzeugende Kreis ABC bei seinem ersten Herumrollen mit dem Punkte A die Zykloide ADE beschreibt, so wird diese Zykloide noch nicht beendigt sein, sondern es wird bei fortgesetztem Rollen eine zweite EFG beschrieben werden, darauf eine dritte GHI, dann eine vierte IKL usf., bis schließlich der Punkt A nach verschiedenen Umdrehungen wieder in seine Anfangslage A fällt. In diesem Falle wird bei weiter fortgesetztem Rollen dieselbe Zykloide von neuem erzeugt, so daß also alle Zykloiden zusammen nur eine einzige Kurve $ADEFGHIKL$ usw. bilden. Wenn nun die Radien des unbeweglichen und des erzeugenden Kreises inkommensurabel sind, so werden auch ihre Umfänge inkommensurabel sein. Es wird daher der erzeugende Kreis ABC unendlich viele Umdrehungen ausführen, bevor der Punkt A wieder in die Anfangslage A fällt. Auf diese Weise erhält man also unendlich viele Zykloiden, die nur eine einzige Kurve $ADEFGHIKL$ usw. bilden. Ich behaupte, daß diese Kurve eine mechanische ist. Sollte man sagen, sie sei eine geometrische, so ziehe man auf irgend eine Weise eine gerade Linie HF durch die Kurve hindurch. Diese Gerade wird [das ist klar] die Kurve in unendlich vielen Punkten H, m, n usw. F schneiden. Da aber die Gleichung, die die Natur irgend einer Kurve ausdrückt, mindestens ebensoviele Dimensionen hat, als die Zahl der Schnittpunkte einer Geraden mit der Kurve beträgt, so würde folgen, daß die Gleichung, die die Natur unserer Kurve ausdrückt, unendlich viele Dimensionen hätte, was sinnlos ist. Folglich ist die Kurve eine mechanische[59]).

Hiernach ist klar, daß es unmöglich ist, einen gegebenen Kreisbogen in zwei Teile zu teilen, die sich verhalten wie eine Zahl zu einer Nichtzahl[60]), d. h. die inkommensurabel sind. Wenn dies nämlich geschehen könnte, so wäre unsere Kurve wieder eine geometrische. Es ist auch klar, daß, wenn die Radien des unbeweglichen und des erzeugenden Kreises kommensurabel sind, die dabei entstehende Zykloide, wenn auch eine geometrische Kurve, doch manchmal mehr oder weniger kompliziert ist. Je nachdem nämlich der erzeugende Kreis nach weniger oder mehr Umdrehungen wieder nach dem Anfang zurückgelangt, wird die gerade Linie HF auch die Kurve in weniger oder in mehr Punkten schneiden, und daher steigt die Gleichung, die die Natur der Zykloide ausdrückt, zu weniger oder mehr Dimensionen auf.

Wir haben bisher gesehen, worin die Zykloiden voneinander

verschieden sind, und was jede Besonderes an sich hat. Jetzt wollen wir zusehen, worin sie übereinstimmen, und was ihnen gemeinsam ist. Zuerst bietet sich ihre allgemeine Rektifikation dar und die Ausmessung der zykloidalen Flächen und dann die Ähnlichkeit[61]) der durch die Abwicklung der Zykloide erzeugten Kurve. Damit diese Dinge um so besser verstanden werden können, betrachte ich den unbeweglichen und den erzeugenden Kreis als zwei gleichseitige und gleichwinklige Polygone, bei denen die Seite des einen gleich der Seite des andern ist. Es seien z. B. die beiden Polygone ABD und ABC gleichwinklig und gleichseitig für sich, nicht unter sich, und sie mögen die gemeinsame Seite AB haben, so daß, wenn das eine Polygon sich auf dem andern bewegt, die Seite AE auf AF fällt, dann EG auf FH, weiter GC auf HJ u.s.f. Wenn man nun annimmt, daß diese beiden Polygone aus unendlich vielen Seiten bestehen, wird man sie als Kreise ansehen können, so daß die Kurve, die irgendein Punkt wie C beschreibt, die Zykloide ist, um die es sich handelt. Es ist daher von vornherein zu bemerken, daß nach dieser Voraussetzung die Seitenzahl des Polygons ABD oder vielmehr des unbeweglichen Kreises sich zur Seitenzahl des erzeugenden Kreises ABC verhält wie der Durchmesser jenes zu dem Durchmesser dieses, weil sich Seitenzahl zu Seitenzahl verhält wie Peripherie zu Peripherie. Da aber nach Verlängerung von BA der Winkel KAF gleich vier Rechten geteilt durch die Seitenzahl des Polygons und KAE gleich vier Rechten geteilt durch die Seitenzahl des andern Polygons ist, so wird sich der Winkel KAE zu dem Winkel KAF umgekehrt verhalten wie die Seitenzahl des erzeugenden Kreises zur Seitenzahl des unbeweglichen Kreises, d. h. wie der Durchmesser jenes zu dem Durchmesser dieses.

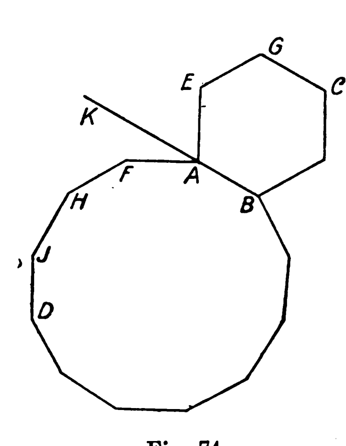


Fig. 74.

Man ziehe vom Punkte C aus, der die Zykloide beschreibt,

die Geraden CB, CA, CE, CL usw. Dann werden die Winkel ACB, ECA, LCE, GCL usw. gleich sein. Da aber

$$EAK + EAB = 2 \text{ Rechten} = ECB + EAB$$

ist, so wird

$$EAK = ECB = 2\,ACB$$

sein. Es sei jetzt der Durchmesser des erzeugenden Kreises

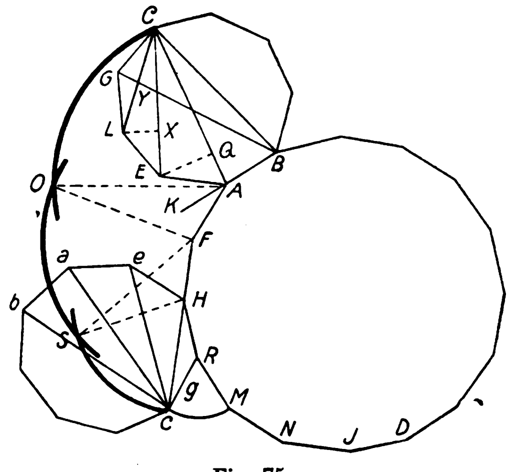


Fig. 75.

gleich $2b$ und der Durchmesser des unbeweglichen Kreises gleich $2a$. Dann wird also sein

$$KAF : KAE = b : a,$$

und daher, wenn man zusammensetzt,

$$FAE : KAE = (b + a) : a,$$

mithin

$$FAE : ACB = (2b + 2a) : a.$$

Man betrachte nun die Erzeugung der Zykloide, die sich aus kleinen Kreisbögen zusammensetzt, deren Mittelpunkte A, F, H, R usw. und deren Radien AC, EC, LC, GC usw. oder OA, SF, cH, MR usw., sind. Dann ist aus der Erzeugung

klar, daß die Winkel OAC, SFO, cHS usw. gleich dem Winkel EAF sind. Daher ist[62])

$$OC : AB = SO : EQ = cS : LX \text{ usw.} = (2b + 2a) : a,$$

mithin alle ersten Glieder zusammen, d. h. die Kurve Cc, zu allen zweiten zusammen, d. h. zur Strecke YB oder GB, wie $2b + 2a$ zu a. Die Fläche $COScRFA$ aber besteht aus den Sektoren OAC, SFO, cHS usw. vermehrt um die Sektoren ACB, FOA, HSF, RCH usw., die gleich sind ACB, ECA, LCE, GCL usw., d. h. zusammen gleich dem Segment CLB. Es ist aber Sektor

$$OAC : ACB = SFO : ECA = cHS : LCE \text{ usw.} = (2b + 2a) : a,$$

mithin alle ersten Glieder zusammen, $OAC + SFO + cHS$ usw. zu allen zweiten zusammen, d. h. zu dem Segment BCL wie $(2b + 2a) : a$ und, wenn man zusammensetzt, $OAC + SFO + cHS$ usw. $+$ Segm. BCL, d. h. Fläche $COScRAB$, zu Segm. BCL, wie $2b + 3a$ zu a.

Wenn dies richtig auf die Kreise angewandt wird, so wird sich alles leicht ergeben.

Fig. 76.

BEG sei der erzeugende Kreis in irgendeiner Lage. Man ziehe durch die Mittelpunkte die Geraden HJD, HKG und nehme den Bogen DF gleich dem Bogen BE. Ferner sei $HA = a$ und $AJ = b$. Dann ist zunächst klar, daß die Gerade EB, von dem beschreibenden Punkte E zum Berührungspunkte B gezogen, senkrecht zur Zykloide CED ist. Zieht man also EG, so wird diese Gerade sie berühren. Ferner verhält sich das Zykloidenstück DE zu der Strecke AF, d. h. zur Tangente EG wie $2b + 2a$ zu a, steht also zu ihr in konstantem Verhältnis. Demnach verhält sich die ganze zykloidale Kurve DEC zu dem Durchmesser des erzeugenden

Kreises wie $2b+2a$ zu a. Die zykloidale Fläche *DEBA* aber verhält sich zu dem Segment *DFRA*, d. h. zu dem Segment *BELG* wie $2b+3a$ zu a, steht also zu ihr ebenfalls in konstantem Verhältnis. Daher verhält sich die ganze zykloidale Fläche *DECA* zu dem erzeugenden Halbkreis wie $2b+3a$ zu a.

Anmerkung. Wenn der erzeugende Kreis sich auf der konkaven Seite des unbeweglichen Kreises bewegt, so wird der Durchmesser des erzeugenden Kreises eine negative Größe sein. Daher muß man, um die Rektifikation und Ausmessung der zykloidalen Kurve und Fläche zu erhalten, folgenden Ansatz machen: Wie sich $-2b+2a$ zu a verhält, so die Kurve *DE* zur Strecke *EG*, und wie sich $-2b+3a$ zu a verhält, so die Fläche *DEBA* zu dem Segment *BELG*.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

Wir haben gezeigt, wie man verfährt, um die Zykloide zu rektifizieren und ihre Fläche auszumessen, und zwar nach der Natur ihrer Erzeugung. Ein wenig umständlicher und mühsamer als dieses Verfahren ist das, welches wir jetzt mit Hilfe der Integralrechnung geben.

Es sei also *ARC* (Fig. 77) der unbewegliche Kreis, dessen Durchmesser gleich $2a$ ist, *DPA* der erzeugende Kreis und sein Durchmesser gleich $2b$. Der oberste Punkt *D*, der die Zykloide beschreibt, kommt beim Rollen nach *E*. Durch *E* ziehe man einen Kreisbogen *EN* mit dem Mittelpunkt *H* und einen zweiten *en*, der von dem vorigen um eine unendlich kleine Größe entfernt ist. Man zeichne die Linien *HES*, *Hes*, *HMP* und fälle die Senkrechten *PO*, *ML*. Weil nun der Halbkreis *DPA* gleich dem Bogen *ARC* ist und *ER* oder *PA* gleich *RC*, so wird der Restbogen *DP* gleich dem Bogen *AR* sein. Es ist auch klar, daß der Bogen *AM* gleich dem Bogen *RB* ist.

Man setze also $DO=x$, Bogen $DP=s$, Bogen $AM=t$, mithin $AB=s+t$. Dann wird sein

$$PO=\sqrt{2bx-x^2},\quad HO=a+2b-x$$

und daher

$$PH=\sqrt{a^2+4ab+4b^2-2ax-2bx}.$$

Da aber $PH:PO = MH:ML$ ist, so findet man

$$ML = \frac{a\sqrt{2bx - x^2}}{\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2 - 2ax - 2bx}}$$

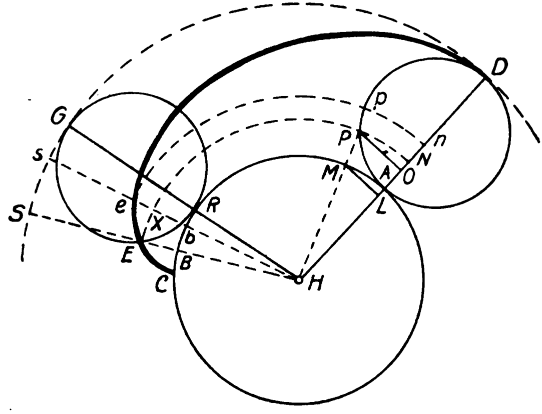


Fig. 77.

und dann

$$HL = \frac{a^2 + 2ab - ax}{\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2 - 2ax - 2bx}},$$

mithin

$$AL = a - \frac{a^2 + 2ab - ax}{\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2 - 2ax - 2bx}}.$$

Um die Rechnung zu erleichtern, setze man

$$\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2 - 2ax - 2bx} = z.$$

Dann wird

$$x = \frac{a^2 + 4ab + 4b^2 - z^2}{2a + 2b}$$

sein und

$$\sqrt{2bx - x^2} = \frac{\sqrt{-z^4 + 4b^2z^2 + 4abz^2 + 2a^2z^2 - 4a^2b^2 - 4a^3b - a^4}}{2a + 2b},$$

mithin

$$ML = \frac{a\sqrt{-z^4 + 4b^2z^2 + 4abz^2 + 2a^2z^2 - 4a^2b^2 - 4a^3b - a^4}}{2az + 2bz}.$$

und

$$AL = a - \frac{a^3 + 2a^2b + az^2}{2az + 2bz}.$$

Es wird also das Differential von ML lauten[63])

$$\frac{(-az^4 + 4a^4b + 4a^3b^2 + a^5)\,dz}{(2az^2 + 2bz^2)\sqrt{-z^4 \text{ usw.}}}$$

und das Differential von AL

$$\frac{(2a^2b + a^3 - az^2)\,dz}{2az^2 + 2bz^2}.$$

Es sei, um die Rechnung zu erleichtern, $2b + a = c$. Dann wird[64])

$$\text{Diff. } ML = \frac{(-az^4 + a^3c^2)\,dz}{(2az^2 + 2bz^2)\sqrt{-z^4 + 4b^2z^2 + 4abz^2 + 2a^2z^2 - a^2c^2}}$$

und

$$\text{Diff. } AL = \frac{(a^2c - az^2)\,dz}{2az^2 + 2bz^2}.$$

Man bilde die Quadrate, deren Summe gleich dem Quadrat des Differentials des Bogens AM sein wird, d. h. gleich dt^2. Man hat also dt. Da aber

$$ds = \frac{b\,dx}{\sqrt{2bx - x^2}}$$

ist, so wird man, wenn der Wert von dx und $\sqrt{2bx - x^2}$ eingesetzt wird, auch ds haben. Nun ist der Bogen AB gleich $s + t$. Also wird das Differential des Bogens AB, d. h. Bb, gleich $ds + dt$ sein. Wenn man nun ansetzt

$$HB(a) : HE(z) = Bb\,(ds + dt) : \left\{\frac{z\,ds + z\,dt}{a} = EX\right\},$$

so wird EX in den Differentialen dz bekannt sein. Das Quadrat davon zusammen mit dem Quadrat von $eX(dz^2)$ gibt das Quadrat von Ee, dessen Wurzel Ee gleich dem Differential der Zykloide DE ist. Ihr Integral ist somit gleich der zykloidalen Kurve DE. Wenn man will, kann man darin den Wert von z in den Buchstaben x wieder einsetzen, und es wird sich dann zeigen, ob es mit der früheren Lösung zusammenfällt.

Wenn man EX mit $\frac{1}{2}HE(\frac{1}{2}z)$ multipliziert, so ergibt sich das Dreieck EHe, das dem Differential der zykloiden Fläche EDH gleich ist; daher zeigt das Integral davon die Ausmessung jener Fläche.

Noch auf eine andere Weise läßt sich mit Hilfe der Integralrechnung das oben Verlangte leisten. Wir machen dieselben Voraussetzungen wie oben, und es seien ER, er senkrecht zur Zykloide. Man ziehe die Tangenten ZA, RF, rf. Dann ist klar, daß PA, pA gleich ER, er sind, ebenso auch die Winkel PAZ, pAZ gleich den Winkeln ERF, erf, mithin $pAP = erf - ERF =$ $= erf - ERf - FRf =$ $erf - rRX - RHr =$ (wegen $erf = RXr + rRX$) $RXr - RHr$. Da aber $Rr = Pp$, und zwar beides gleich ds, ist, so wird der Winkel RHr sich zu POp $(2\,PAp)$ verhalten wie b zu a, so daß

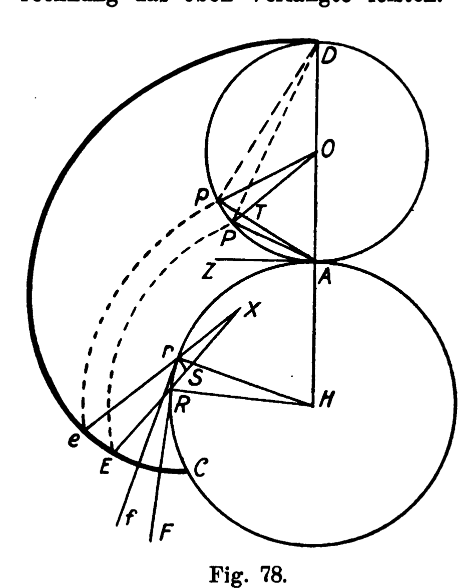


Fig. 78.

$$\frac{2b}{a} \cdot PAp = RHr$$

ist, also

$$PAp = rXR - \frac{2b}{a} \cdot PAp \quad \text{und} \quad \frac{a+2b}{a} \cdot PAp = rXR,$$

mithin

$$a : (a + 2b) = pAP : rXR.$$

Da aber $Pp = Rr$ und $pT =$ (wegen pA und PA gleich ER und er) RS, so wird auch $PT = rS$ sein, mithin $PAp : rXR =$ $= RX : PA$, also

$$PA : RX = (a + 2b) : a.$$

und, wenn man zusammensetzt,

$$(PA + RX = EX) : RX = (2a + 2b) : a.$$

Es ist aber $EX : RX = Ee : rS(PT)$, mithin

$$Ee : PT = (2a + 2b) : a,$$

also ein konstantes Verhältnis. Daher verhalten sich alle Ee, d. h. die zykloidale Kurve DE, zu allen PT, d. h. zu der Strecke DP, wie $2a + 2b$ zu a, so wie oben.

Die zykloidale Fläche $ERAD$ wird ebenfalls sehr leicht gefunden. Da nämlich

$$Ee = \frac{2a + 2b}{a} \cdot rS$$

ist, wird

$$Ee + rS = \frac{3a + 2b}{a} \cdot rS.$$

Die Hälfte hiervon, multipliziert mit ER oder PA, gibt

$$\frac{3a + 2b}{2a} \cdot rS \cdot PA = \text{Trapez } Er.$$

Da aber

$$\text{Dreieck } PAp = PT \cdot \tfrac{1}{2} PA \quad \text{oder} \quad rS \cdot \tfrac{1}{2} PA$$

ist, so wird sich das Trapez Er zum Dreieck PAp verhalten wie $\frac{3a + 2b}{a}$ zu 1, d. h. wie $3a + 2b$ zu a, wieder ein konstantes Verhältnis. Daher werden sich alle Trapeze, d. h. die Fläche $ARED$ zu allen Dreiecken PAp, d. h. zu dem Segment $DpPA$, verhalten, wie $3a + 2b$ zu a, so wie oben.

Dies ist also die allgemeine Rektifikation der zykloidalen Kurve und die Ausmessung ihrer Fläche. Sie läßt sich auf alle Fälle anwenden, auch auf die gewöhnliche *Huygens*sche Zykloide. In diesem Falle ist nämlich der Durchmesser des unbeweglichen Kreises unendlich zu setzen, und es wird dann der Bogen AC zu einer Strecke ausarten, ebenso der Bogen EP. Wenn wir also das Verhältnis der Kurve DE zu der DP finden wollen, so müssen wir folgenden Ansatz machen:

$$a : (2a + 2b) = DP : DE \text{ (der gesuchten Kurve).}$$

Da aber a unendlich ist, so wird sein $2a + 2b = 2a$. Daher

verhält sich DP zu der Kurve DE wie a zu $2a$, d. h. wie 1 zu 2. Ebenso hat man auch

$$a:(3a+2b) = \text{Segment } DpPA : \text{Fläche } DERA.$$

Es ist aber $3a+2b=3a$, mithin

$$a:3a = 1:3 = \text{Segment } DpPA : \text{Fläche } DERA.$$

Diese Tatsachen sind bei der gewöhnlichen Zykloide auch sonst bekannt.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes.

Nachdem wir auf verschiedene Arten die Rektifikation der zykloidalen Kurven und die Ausmessung ihrer Flächen ermittelt haben, bleibt uns noch übrig, eine allgemeine Eigenschaft dieser Kurven zu beweisen, daß nämlich jede beliebige zykloidale Kurve bei ihrer im Scheitel begonnenen Abwicklung eine andere mit ihr ähnliche zykloidale Kurve beschreibt.

Es sei also ABC eine Zykloide, A ihr Scheitel, EBF der erzeugende, DFC der unbewegliche Kreis, und es sei durch

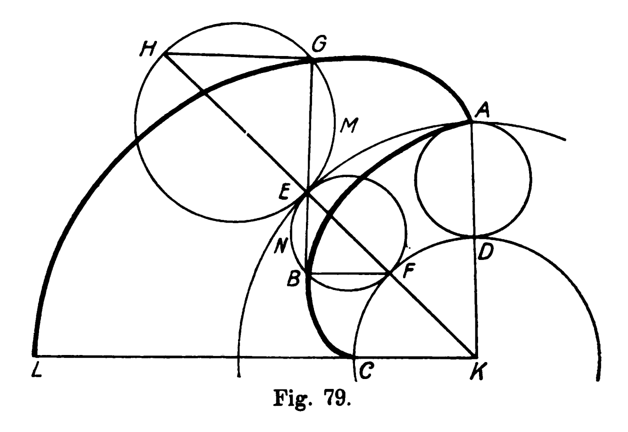


Fig. 79.

Abwicklung der Zykloide, vom Scheitel A ausgehend, die Kurve AGL beschrieben. Ich behaupte, daß diese Kurve ebenfalls eine Zykloide und mit ABC ähnlich ist.

Man ziehe die Tangente BEG. Da sie die Abwickelnde ist, wird sie senkrecht zur Kurve AGL und gleich der Kurve AB sein. Man ziehe noch durch die Mittelpunkte der Kreise die Gerade KEH und verbinde B, F. Dann mache man, daß sich FE zu EH verhält, wie KF zu KE (d. h. wie a zu $a + 2b$) und beschreibe über dem Durchmesser HE den Kreis HME. Nach dem Früheren steht fest, daß sich BE zu BA oder BG verhält wie a zu $2a + 2b$, also, wenn man teilt, BE zu EG wie a zu $a + 2b$, d. h. nach Konstruktion wie FE zu EH. Verbindet man daher H, G, so wird das Dreieck HGE ähnlich sein dem Dreieck EBF. Somit ist der Winkel HGE ein Rechter, und daher geht der Kreis HME durch den Punkt G. Da nun

$$\text{Winkel } BEF = \text{Winkel } HEG,$$

wird der Bogen BNE dem Bogen EMG ähnlich sein, mithin

$$\begin{aligned}\text{Bog. } GME : \text{Bog. } BNE &= GE : BE = HE : EF = EK : FK \\ &= \text{Bog. } EA : \text{Bog. } FD.\end{aligned}$$

Da aber $ENBF = CFD$ und Bogen $BF =$ Bogen CF ist, so wird auch der Restbogen $ENB =$ dem Restbogen FD sein. Daher folgt, daß auch

$$\text{Bog. } EMG = \text{Bog. } EA$$

ist. Demnach ist die Kurve AGL eine Zykloide, deren erzeugender Kreis HGE und deren unbeweglicher Kreis AE ist. Daß aber diese Zykloide AGL der früheren ABC ähnlich ist, geht aus der Konstruktion hervor. Es ist nämlich $KF : KE = FE : EH$ und, wenn man vertauscht, $KE : EH = KF : FE$, d. h. wie der Radius des unbeweglichen Kreises der früheren Zykloide zum Durchmesser des erzeugenden Kreises. Also usw.

Korollar I. Die Kurve GL verhält sich zu der Strecke GH, wie die Kurve AB zu der Strecke BE, weil sie beidemal im Verhältnis a zu $2a + 2b$ stehen.

Korollar II. Die ganze Kurve AL verhält sich aber zur ganzen Kurve ABC wie der Durchmesser HE zum Durchmesser EF.

Korollar III. Es ist auch klar, wenn ABC eine gewöhnliche Zykloide ist, d. h. eine solche, deren erzeugender Kreis auf einer geraden Linie rollt, oder deren unbeweglicher Kreis einen unendlichen Durchmesser hat, es ist klar, sage ich, daß

die Zykloide AGL nicht allein ebenfalls eine gewöhnliche ist, sondern überhaupt dieselbe wie die frühere. Da nämlich $KF:KE = FE:EH$, d. h.

$$a:(a+2b) = FE:EH$$

ist und KF unendlich ist, so wird $a+2b = a$ sein, mithin

$$FE = EH.$$

Da also die erzeugenden Kreise dieselben sind, und beide auf einer geraden Linie rollen, folgt, daß auch die Zykloiden dieselben sind.

Dies ist nun die Zykloide, von der Herr *Huygens* geglaubt hat, sie habe allein jene Eigenschaft, bei der Abwicklung eine andere und dieselbe Zykloide zu erzeugen. Herr *Tschirnhaus* hebt seine Kaustik hervor, die bei ihrer Abwicklung nicht dieselbe, sondern eine ähnliche Kurve beschreibt. Wir aber haben gezeigt, daß das, was *Tschirnhaus* von seiner Kaustik bewies, deren Zugehörigkeit zum Zykloidengeschlecht er zugleich dartat, allgemein allen Zykloiden zukommt. Da aber keine unter allen Zykloiden, mit Ausnahme der gewöhnlichen, bei ihrer Abwicklung nicht nur eine ähnliche, sondern dieselbe Kurve beschreibt, so konnte Herr *Huygens* bis jetzt mit Recht daran zweifeln, ob es außer seiner Zykloide noch eine andere Kurve gibt, die durch ihre Abwicklung dieselbe Kurve hervorzubringen vermag. Er wird aber zu zweifeln aufhören, wenn er die andere Kurve, die wir geben, gesehen hat, die sich nicht minder als die genannte Zykloide dieser Eigenschaft erfreut. Und zwar ist diese Kurve die logarithmische Spirale.

Es sei in der Tat die Kurve $BEFG$ (Fig. 80) eine logarithmische Spirale und deren Mittelpunkt A. Man ziehe die Tangente BC und errichte auf der Verbindungslinie AB die Normale AC. Es sei $AB = y$, $BL = dy$. Aus der Natur der logarithmischen Spirale ist klar, daß der Winkel LBM konstant ist. Es verhalte sich also BL zu BM, d. h. BA zu BC, wie a zu b. Dann wird also sein

$$BC = \frac{by}{a}.$$

Da aber auch BL sich zu BM verhält wie a zu b, so wird

$$BM = \frac{bdy}{a}$$

sein und das Integral davon, d. h.

$$\text{die Kurve } BEFG = \frac{by}{a},$$

also

$$\text{die Kurve } BEFG = \text{der Tangente } BC.$$

Wenn daher die Gerade BC wie ein Faden um die Kurve $BEFG$ gewickelt wird, so wird die Kurve $CHJK$, die der

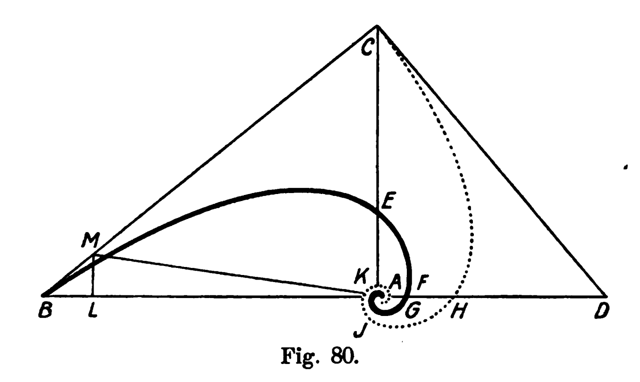


Fig. 80.

Endpunkt C beschreibt, die Kurve sein, die durch die Abwicklung der logarithmischen Spirale $BEFG$ erzeugt wird. Ich behaupte, daß diese Kurve dieselbe Spirale ist. Man verlängere nämlich BA so weit als nötig ist, um CD, die Senkrechte auf BC, zu treffen. Da aber BC senkrecht zur Kurve CH ist, so wird CD die Tangente der Kurve CH sein. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke BAC und CAD ist aber der Winkel CBA gleich dem Winkel DCA. Daher ist der Winkel DCA ebenfalls konstant, mithin die Kurve $CHJK$ eine logarithmische Spirale, und zwar dieselbe wie $BEFG$ wegen der Gleichheit der Winkel CBA und DCA.

Korollar I. Wenn irgendeine logarithmische Spirale $BEFG$ zur Strecke BC ausgespannt wird, so werden BA, MA usw. Ordinaten in dem rechtwinkligen Dreieck BAC. Denn wegen der Konstanz des Winkels ABM werden BA, MA usw. Parallelen, und da sie in konstantem Verhältnis zu den angrenzenden Stücken der Kurve, so ist die Behauptung bewiesen. Wie daher die *Archimedes*sche Spirale[65]) eine zu-

sammengewickelte Parabel ist, so ist die logarithmische Spirale ein zusammengewickeltes rechtwinkliges Dreieck.

Korollar II. Das Dreieck BAC ist das Doppelte der Fläche $BEFG$, weil das Differential des Dreiecks das Doppelte des Flächendifferentials ist.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

— — — — — — — — — — — — —

Die kurze Abschweifung, die wir gemacht haben, zeigt zur Genüge, daß nicht die Zykloide allein es ist, der die so oft wiederholte Eigenschaft zukommt. Ja es könnte sogar die beigebrachte logarithmische Spirale nicht ohne Wahrscheinlichkeit die Vermutung wachrufen, daß es viele andere, ja sogar unendlich viele Kurven gibt, die durch ihre Abwicklung dieselben oder wenigstens ähnliche bilden, und vielleicht wäre es nicht schwer, mit Hilfe unserer Integralrechnung ein Verfahren auszudenken, durch das man solche Kurven findet. Da aber jetzt keine Zeit ist, dies zu leisten, so müssen wir es andern überlassen[66]).

— — — — — — — — — — — — —

Sechsundzwanzigste Vorlesung.

Über die kaustischen Kurven und ihre Eigenschaften.

Wenn die Sonnenstrahlen auf den konkaven Teil irgend einer Kurve fallen, so werden sie durch ihre Reflexion eine andere Kurve bilden, die von Herrn *Tschirnhaus* den Namen Kaustik erhalten hat, und deren erster Erfinder er war[67]). Die Alten haben nämlich, bis zu unserer Zeit, nur einen einzigen Punkt auf der Kurvenachse betrachtet, in dem sich alle oder wenigstens mehrere Strahlen nach ihrer Reflexion sammeln. Diesen Punkt nannte man Brennpunkt, weil in ihm die größte Brennkraft der zurückgeworfenen Strahlen ausgeübt wird.

Vor wenigen Jahren hat der genannte *Tschirnhaus* die schöne Bemerkung gemacht, daß die Kurven, die die reflektierten Strahlen nicht ganz genau in dem erwähnten Brennpunkte sammeln, unendlich viele Punkte haben, die alle als Brennpunkte bezeichnet werden können, und in denen mehrere Strahlen zusammenlaufen. Jene Punkte nun bilden in ihrem Zusammen-

hang eine kaustische Kurve oder Brennlinie, deren Natur, Rektifikation und bemerkenswerte Eigenschaften er in den Acta[68]) veröffentlicht hat, jedoch ohne Rechnung und mit Unterdrückung der Methode, durch die er dazu gelangt ist.

Wir werden daher hier ein Verfahren darlegen, durch das sich alles, was diese Kurven Beachtenswertes bieten, ganz leicht aufdecken läßt. Dabei wird zugleich klar werden, daß der Urheber keinen geringen Irrtum beging, indem er meinte, die Kaustik beim Kreise sei die Kurve, deren Konstruktion er in denselben Acta angibt. Diese beiden Kurven sind nämlich in ihrer Natur himmelweit verschieden und haben garnichts Gemeinsames außer der Fläche, die bei beiden zu demselben Halbkreis in demselben Verhältnis steht. Dies ist es, was den Urheber getäuscht hat, wie weiter unten ausführlicher entwickelt werden wird.

Jetzt soll die Art, wie wir uns die Kurve erzeugt denken, auseinandergesetzt werden. Es sei ABC (Fig. 81) irgend eine Kurve, auf die die parallelen Sonnenstrahlen DB, db usw. fallen, deren reflektierte BE, bE usw. sind. Der Treffpunkt E von zwei reflektierten Strahlen, die um eine unendlich kleine Größe entfernt sind, liegt auf der kaustischen Kurve. Auf diese Weise ist es nach dem oben Gesagten sofort klar, daß der reflektierte Strahl eine Tangente der kaustischen Kurve ist; denn zwei um nichts entfernte Tangenten schneiden sich in dem Berührungspunkt. Um die Natur der kaustischen Kurve zu bestimmen, könnte man also folgendes Problem aufstellen: Die Natur der Kurve zu finden, die alle an einer gewissen Kurve reflektierten Strahlen berühren. Dieses Problem wird aber in derselben Weise gelöst, wie es oben bei der Kurve geschehen ist, die von einem Lineal berührt wird, das sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegt (vgl. Seite 90). Um dies nun im vorliegenden Falle auf die Bestimmung und

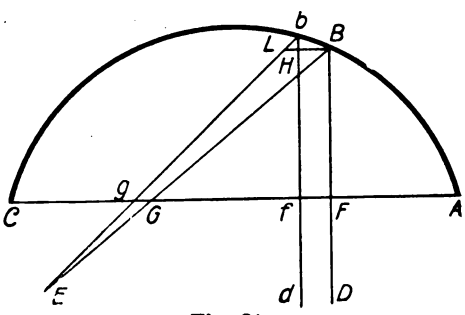


Fig. 81.

Konstruktion der Kurve anzuwenden, muß man die Länge BE des reflektierten Strahles finden, die zwischen dem Inzidenzpunkt B und dem Treffpunkt E liegt.

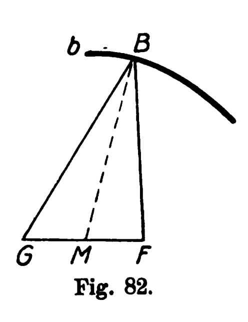


Fig. 82.

Es sei zu diesem Zwecke die Abszisse AF bei der gegebenen Kurve gleich x, und die Ordinate FB bei derselben gleich y, mithin $Ff = dx = BH$ und $bH = dy$. Ferner sei $BG = z$. Man zeichne das Dreieck FBG besonders (Fig. 82) und halbiere den Winkel FBG durch die Gerade BM. Dann wird BM senkrecht zur Kurve Bb sein, mithin $dx : dy = BF : FM$. Man findet daher $FM = ydy : dx$. Da aber $BF : BG = FM : MG$ ist, so wird, wenn man zusammensetzt, $BF : (BF + BG) = FM : FG$ sein, d. h.

$$y : (y + z) = \frac{ydy}{dx} : FG,$$

also

$$FG = \frac{ydy + zdy}{dx}.$$

Es ist aber $BF^2 + FG^2 = BG^2$. Also hat man folgende Gleichung:

$$\frac{y^2dy^2 + 2zydy^2 + z^2dy^2}{dx^2} + y^2 = z^2.$$

Reduziert man sie, so kommt heraus

$$z^2 = \frac{2zydy^2 + y^2dy^2 + y^2dx^2}{dx^2 - dy^2}.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung erhält man[69])

$$z = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dx^2 - dy^2} = BG.$$

Da $FG = (ydy + zdy) : dx$ ist, so muß man den gefundenen Wert von z einsetzen. Dann erhält man

$$FG = \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2}.$$

Addiert man AF (Fig. 81), so wird

$$AG = \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2} + x.$$

Das Differential hiervon (vorausgesetzt, daß dx konstant, d. h. $d^2x = o$ ist) wird also lauten:

$$\frac{dx^5 + 2ydx^3d^2y - dxdy^4 + 2ydxdy^2d^2y}{(dx^2 - dy^2)^2} = Gg.$$

Da aber $BF:FG$ (oder $bf:fg$) $= bH:HL$ ist, d. h.

$$y : \frac{2ydxdy}{dx^2 - dy^2} = dy : HL,$$

also

$$HL = \frac{2dxdy^2}{dx^2 - dy^2},$$

so wird

$$BH + HL = BL = \frac{dxdy^2 + dx^3}{dx^2 - dy^2}$$

sein. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke BEL und GEg ist aber $BE:GE = BL:Gg$ und, wenn man teilt, $BG:BE = (BL - Gg):BL$. Man schreibe also

$$\left(BL - Gg = \frac{-2ydx^3d^2y - 2ydxdy^2d^2y}{(dx^2 - dy^2)^2}\right) : \left(BL = \frac{dxdy^2 + dx^3}{dx^2 - dy^2}\right)$$

$$= \frac{-2yd^2y}{dx^2 - dy^2} : 1 = \left(BG = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dx^2 - dy^2}\right) : BE.$$

Dann wird

$$BE = -\frac{dx^2 + dy^2}{2d^2y}.$$

Hiernach läßt sich bei jeder gegebenen Kurve die Länge BE des reflektierten Strahles finden, indem man einfach den Wert von dy und d^2y einsetzt, je nachdem es die Natur der Kurve fordert. Auf diese Weise zerstören sich dx, dy, d^2y, und es ergibt sich die Länge BE in rein endlichen Größen. Kennt man nun BE, so läßt sich die kaustische Kurve konstruieren und ist daher bestimmt.

Nachdem wir allgemein die kaustischen Kurven bestimmt haben, wollen wir, bevor wir zu speziellen herabsteigen, ihre allgemeine Rektifikation vorausschicken.

Es sei also ABG irgend eine Kurve, an der durch die Reflexion der Strahlen EB, eb usw. die Kaustik AHJ gebildet ist. Ich behaupte, daß irgend ein Stück AH von ihr gleich ist dem einfallenden Strahl EB plus dem reflektierten Strahl BH.

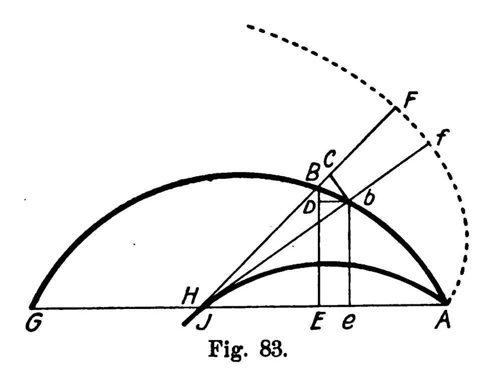


Fig. 83.

Beweis. Aus dem Früheren ist bekannt, daß HB die Kaustik berührt. Man wickle also die Kurve AH ab und sie beschreibe dabei die Kurve AfF. Offenbar fällt HB mit der abwickelnden HF dann zusammen, wenn die Abwicklung bis zum Punkte H gekommen ist. Man beschreibe daher um den Mittelpunkt H den kleinen Kreisbogen bC, der zu dem kleinen Bogen fF parallel sein wird. Daher ist $CF = bf$. Also ist BC das Differential von BF. Da aber nach Voraussetzung Winkel EBb = Winkel HBG = Winkel CBb ist, die Winkel BDb und BCb aber rechte sind, so werden die Dreiecke BDb und BCb wegen der gemeinsamen Hypotenuse Bb kongruent sein. Mithin ist $BD = BC$. BD ist aber das Differential von BE und BC das Differential von BF. Also folgt $BE = BF$. Da nun die Kurve $AH = HF$ und $HF = HB + BF$ ist, so wird die Kurve AH gleich dem reflektierten Strahl HB plus dem einfallenden EB.

Man bemerke, daß, wenn BE und BF nicht von Null anfangen, zu der Summe der Strecken HB und BE eine gewisse Konstante als Bekannte addiert oder davon abgezogen werden muß.

Siebenundzwanzigste Vorlesung.

Die zirkulare Kaustik paralleler Strahlen.

Damit das, was wir allgemein gelöst haben, durch Beispiele erläutert werde, sei BGC ein Kreis, sein Durchmesser $DB = 2a$, $BH = x$, $HG = y = \sqrt{2ax - x^2}$. Es soll die kaustische

Kurve BFE bestimmt werden, oder, was dasselbe ist, es soll die Länge des reflektierten Strahles GF gefunden werden. Dies wird nach der allgemeinen Formel so durchgeführt. Da $y = \sqrt{2ax - x^2}$ ist, wird

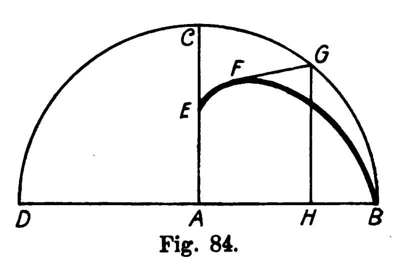


Fig. 84.

$$dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - x^2}}$$

sein und

$$d^2y = -\frac{a^2dx^2}{(2ax - x^2)\sqrt{2ax - x^2}},$$

mithin findet man

$$-\frac{dx^2 + dy^2}{2d^2y} \text{ oder } GF = \tfrac{1}{2}\sqrt{2ax - x^2} = \tfrac{1}{2}\, GH.$$

Um also die Kaustik zu konstruieren, muß man den reflektierten Strahl GF gleich der Hälfte des einfallenden GH nehmen. Dann wird der Punkt F auf der gesuchten Kurve liegen. Wenn daher der Punkt H nach A fällt, so wird der Punkt F in die Mitte E des Kreisradius AC fallen, und dies ist der Punkt, den die Alten den **Brennpunkt** des Kreises genannt haben.

Es steht ferner fest, daß die Kurve FB sich zu dem reflektierten Strahl FG wie 3 zu 1 verhält, zum einfallenden HG dagegen wie 3 zu 2. Daher verhält sich die ganze Kaustik EFB zu dem Kreisradius wie 3 zu 2.

Herr von *Tschirnhaus* hat synthetisch gezeigt, daß $GF = \frac{1}{2} GH$ ist, und zwar auf folgende Weise:

Fig. 85.

MG, mg seien zwei zum Durchmesser DB senkrechte Sonnenstrahlen, die um eine unendlich kleine Größe voneinander entfernt sind. Man ver-

längere die reflektierten Strahlen GF, gF, bis sie die Peripherie in N und n treffen. Es wird nun der Bogen GBM gleich dem Bogen GEN sein, und der Bogen gBm gleich gEn, also $gBm - GBM$, d. h. $2gG$, gleich $gEn - GEN$, d. h. $Nn - Gg$. Folglich ist $Nn = 3Gg$. Da aber Winkel NnF = Winkel FGg (sie stehen nämlich über demselben Segment Ng), so werden die Dreiecke NFn und gFG ähnlich sein, mithin

$$NF : (Fg \text{ oder } FG) = Nn : gG = 3 : 1$$

und, wenn man zusammensetzt,

$$(NG \text{ oder } MG) : FG = 4 : 1,$$

mithin

$$HG : FG = 2 : 1,$$

wie wir vorher gefunden haben.

Wenn wir die Natur der kaustischen Kurve BFE durch eine Gleichung nach Ordinaten und Abszissen ausdrücken wollen, so werde vom Mittelpunkt A aus der Radius AG gezogen, und die Gerade GF bis zum Schnitt mit der Geraden AC in L verlängert. Darauf fälle man die Lote LP, FO und setze $AO = r$ und $OF = s$. Da Winkel $LAG = AGH = AGL$, so wird $LA = LG$ sein, mithin $AP = PG$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke LAP, LGP und AGH ist $GH : AG = GP : GL$, d. h.

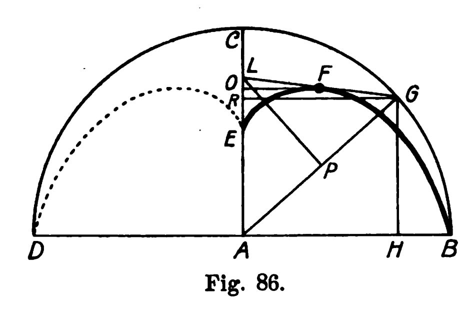


Fig. 86.

$$\sqrt{2ax - x^2} : a = \tfrac{1}{2}a : LG,$$

also

$$LG = LA = \frac{1}{2} \frac{a^2}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Ebenso ist $LG : RG = LF : OF$, d. h.

$$\frac{1}{2} \frac{a^2}{\sqrt{2ax - x^2}} : (a - x) = \frac{1}{2} \frac{a^2 - 2ax + x^2}{\sqrt{2ax - x^2}} : OF,$$

also

$$OF = s = \frac{(a-x)^3}{a^2}.$$

Wiederum ist $RG : RL = OF : OL$, d. h.[70])

$$(a-x) : \frac{\frac{1}{2}a^2 - 2ax + x^2}{\sqrt{2ax - x^2}} = \frac{(a-x)^3}{a^2} : OL,$$

also

$$OL = \frac{(\frac{1}{2}a^2 - 2ax + x^2)(a-x)^2}{a^2\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Man ziehe dies von AL ab. Dann erhält man

$$AO = r = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\sqrt{2ax - x^2}} - \frac{(\frac{1}{2}a^2 - 2ax + x^2)(a-x)^2}{a^2\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Um desto schneller und leichter zu einer Gleichung zu gelangen, in der nur r und s zu finden sind, kann man den gefundenen Wert von r so umschreiben:

$$\tfrac{1}{2}a^2 - 2ax + x^2 = (a-x)^2 - \tfrac{1}{2}a^2$$

und

$$\sqrt{2ax - x^2} = \sqrt{-a^2 + 2ax - x^2 + a^2} = \sqrt{-(a-x)^2 + a^2};$$

auf diese Weise kommt heraus:

$$r = \frac{\frac{1}{2}a^2(a-x)^2 - (a-x)^4}{a^2\sqrt{-(a-x)^2 + a^2}} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{\sqrt{-(a-x)^2 + a^2}}.$$

Da aber

$$\frac{(a-x)^3}{a^2} = s$$

ist, so wird

$$a - x = \sqrt[3]{a^2 s} \qquad \text{und} \qquad (a-x)^2 = a\sqrt[3]{as^2}$$

sein. Setzt man also überall den Wert von $a - x$ ein, so erhält man

$$r = \frac{\frac{1}{2}a^3\sqrt[3]{as^2} - a^2 s\sqrt[3]{a^2 s}}{a^2\sqrt{-a\sqrt[3]{as^2} + a^2}} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{\sqrt{-a\sqrt[3]{as^2} + a^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}a\sqrt[3]{as^2} - s\sqrt[3]{a^2 s} + \frac{1}{2}a^2}{\sqrt{-a\sqrt[3]{as^2} + a^2}}.$$

Wenn also s gegeben ist, so läßt sich die andere Koordinate r im allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren, wegen der Irrationalität der dritten Wurzel[71]).

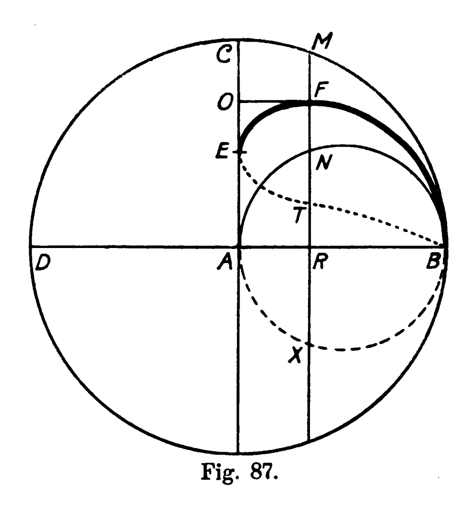


Fig. 87.

Daraus ist zu schließen, daß die kaustische Kurve nicht mit derjenigen EFB zusammenfällt, die von den Punkten F gebildet wird, welche die Parallelen MN zwischen dem Kreise CMB und dem Kreise ANB mit dem Durchmesser AB halbieren, wie Herr *Tschirnhaus* irrtümlich behauptet hat. Es sei nämlich wie früher $AO = r$, $OF = s$. Dann wird sein

$$RN = \sqrt{as - s^2} \quad \text{und} \quad MR = \sqrt{a^2 - s^2},$$

also

$$MN = \sqrt{a^2 - s^2} - \sqrt{as - s^2} \quad \text{und} \quad FN = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - s^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{as - s^2},$$

mithin

$$FN + NR, \text{ d. h. } FR = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - s^2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{as - s^2} = AO = r.$$

Man wird somit bei gegebenem s die andere Koordinate r stets mit Zirkel und Lineal konstruieren können[72]). Daher sind diese beiden Kurven nicht nur nicht identisch, sondern nicht einmal von derselben Gattung.

Es läßt sich aber leicht vermuten, warum Herr *Tschirnhaus* diesen Irrtum begangen hat. Jede der beiden Kurven geht nämlich durch den Punkt B und durch den Halbierungspunkt E hindurch. Ferner ist die Fläche $CEFB$ bei beiden der vierte Teil des Quadranten, weil der Halbkreis ANB die Hälfte des Quadranten CAB ist und $CANB$ das Doppelte der Fläche $CEFB$. Dasselbe wird weiter unten für die Kaustik bewiesen werden[73]).

Auch aus einem andern Kennzeichen geht hervor, daß diese beiden Kurven nicht identisch sind, ohne daß man die Natur der Kurven durch Rechnung zu ermitteln braucht. Wenn man nämlich auf die Erzeugung der Kurven achtet, so wird jeder leicht durchschauen, daß ihre Fortsetzung nicht auf dieselbe Weise verläuft. Denn die kaustische Kurve setzt sich, nachdem sie zum Punkte E gelangt ist (vgl. Fig. 86) nach links durch S bis zum Punkte D fort und beschreibt einen dem früheren ähnlichen Teil, einmal wegen der ähnlichen Lage der Strahlen im zweiten Quadranten, dann auch, weil die Kaustik, wie Herr *Tschirnhaus* selbst anerkennt, und wir bald beweisen werden, eine Art Zykloide ist. Die andere Kurve dagegen, die aus der Halbierung der Strecken MN entsteht, kehrt, nachdem sie den Punkt E erreicht hat, nach derselben Seite zu B zurück (vgl. Fig. 87). Da nämlich MX ebensogut wie MN eine von den beiden Kreisen begrenzte Strecke ist, liegt auch der Punkt T, der die Strecke MX halbiert, nicht minder auf der Kurve als der Punkt F, der die Strecke MN halbiert[74]).

Achtundzwanzigste Vorlesung.

Die zirkulare Kaustik paralleler Strahlen ist zykloidal. Die parabolische Kaustik.

Ich denke, es ist jetzt zur Genüge dargetan, daß die kaustische Kurve beim Kreise und die aus der Halbierung der Zwischenstrecken entstehende keineswegs identisch sind. Nun bietet sich hier eine bemerkenswerte Eigenschaft der Kaustik dar, die Herr *Tschirnhaus* in den Leipziger Acta bewiesen hat[75]), daß sie nämlich durch ihre Abwicklung eine andere ihr ähnliche Kaustik erzeugt. Wir verwandeln diese Eigenschaft in eine andere und werden zeigen, daß die Kaustik eine zykloidale Kurve ist. Dann wird zu gleicher Zeit bewiesen sein, daß die Abwicklung der Kaustik eine Kaustik beschreibt, da alle Zykloiden, wie wir oben gezeigt haben, durch ihre Abwicklung ähnliche Zykloiden hervorbringen.

Es sei also BCD (Fig. 88) ein Kreis, BD ein Durchmesser, NG der einfallende Sonnenstrahl, GF der reflektierte, BFE die kaustische Kurve. Um den Mittelpunkt A beschreibe man mit dem Radius AE den Kreis MPE, ziehe AG und konstruiere den Kreis GQP, der den Strahl GF in Q schneidet. Dann behaupte ich, daß die Kaustik BFE die Zykloide ist, deren

unbeweglicher Kreis MPE, deren erzeugender Kreis GQP, deren Scheitel B und deren Anfang E ist.

Beweis. Der Einfallswinkel NGB ist gleich dem Reflexionswinkel QGC. Also ist das Kreissegment NBG dem Kreissegment QG ähnlich. Daher verhält sich die Sehne NG zur Sehne QG wie der Durchmesser DB zum Durchmesser GP, d. h. wie 4 zu 1. Nimmt man von den ersten Gliedern die Hälften, so wird sein $HG:QG = 2:1 = HG:FG$, also $QG = FG$. Demnach geht der Kreis GQP durch den Berührungspunkt F hindurch. Da aber wegen der Ähnlichkeit der Segmente der Bogen NBG das Vierfache des Bogens GF ist, und derselbe Bogen NBG ($2BG$) gleich dem vierfachen Bogen MP, so wird Bogen GF = Bogen MP sein. Da nun der Halbkreis MES gleich dem Doppelten des Halbkreises GFP ist, wird der Quadrant $MPE = GFP$ sein, folglich der Restbogen PF gleich dem Restbogen PE. Demnach ist die Kaustik EFB eine Zykloide.

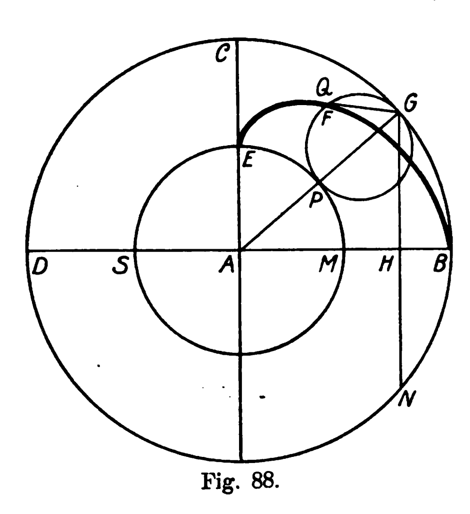


Fig. 88.

Hieraus und aus dem, was wir über die Zykloiden im allgemeinen gesagt haben, ergibt sich von selbst, daß die Kurve BF das Dreifache der Strecke GF ist. Auch lassen sich daraus die übrigen Eigenschaften, die Herr *Tschirnhaus* aufzählt, leicht entnehmen, daß nämlich die kaustische Fläche BFG das Doppelte des Kreissegmentes GF ist, mithin die ganze Fläche BEC gleich dem ganzen Kreise GP.

Wenn ferner die Abwicklung der Kaustik BFE in B beginnt, so wird die andere Kaustik, die dabei beschrieben wird, die umgekehrte Lage wie die frühere haben. Der Anfang befindet sich nämlich im Punkte B und der Scheitel auf der *verlängerten* Linie AC, vom Mittelpunkt A um zwei Radien AC *entfernt. Daher* ist der Kreis, bei dem jene Kaustik erzeugt

wird, viermal so groß als der Kreis, bei welchem die Kaustik BFE beschrieben wird.

Die Fläche, die zwischen der bis zur äußeren Kaustik verlängerten FG, zwischen dem Teil der äußeren Kaustik, der von B ausgeht, und zwischen der inneren Kaustik enthalten ist, ist neunmal so groß als die Fläche BFG.

Wenn der Winkel GAB ein halber Rechter ist, so wird der Punkt F von allen auf der Kaustik der höchste sein, weil dann die Tangente GF zu der Horizontalen BA parallel ist.

— — — — — — — — — — — — —

Wir wollen jetzt die Kaustik des Kreises verlassen und überlegen, von welcher Beschaffenheit sie bei der Parabel ist. Es ist aber anderswoher bekannt, daß Strahlen, die parallel zur Achse sind, nach der Reflexion genau in einem Punkte zusammenlaufen, der Brennpunkt genannt wird, so daß also die ganze Kaustik der Kurve in einen Punkt ausartet. Daher wollen wir statt die Strahlen zur Achse parallel anzunehmen sie zu ihr senkrecht voraussetzen.

Es sei also ABC eine Parabel, A ihr Scheitel, AJ ihre Achse, der Parameter $= a$, $AE = x$, $BE = y = \sqrt{ax}$. Es

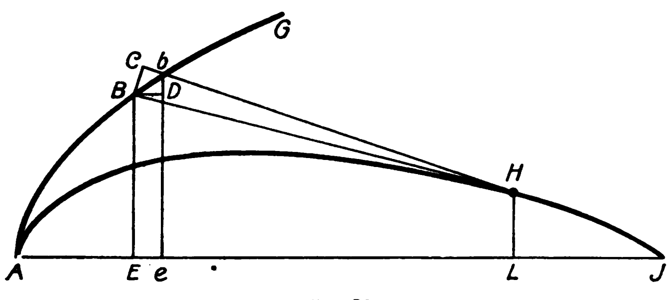


Fig. 89.

seien ferner EB, eb einfallende Strahlen, BH, bH die reflektierten. Man soll die kaustische Kurve AH bestimmen, d. h. die Länge BH ermitteln.

Da $y = \sqrt{ax}$ ist, wird sein

$$dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}},\ dy^2 = \frac{adx^2}{4x} \text{ und } d^2y = -\frac{adx^2}{4x\sqrt{ax}},$$

mithin

$$-\frac{dx^2+dy^2}{2d^2y}=\frac{(a+4x)\sqrt{ax}}{2a}=BH,$$

was sich leicht konstruieren läßt, indem man sagt: Wie sich der doppelte Parameter zur Summe des Parameters und der vierfachen Abszisse AE verhält, so verhält sich die Ordinate BE zur gesuchten Strecke BH. Daher ist die Kurve AH gleich $(3a+4x)\sqrt{ax}:2a$. Um die kaustische Fläche zu quadrieren, multipliziere man HB mit der Hälfte von BC oder BD (diese sind nämlich gleich). Man erhält dann

$$\frac{(a+4x)dx\cdot\sqrt{ax}}{4a}=\text{Dreieck } HBb$$

und das Integral hiervon

$$\tfrac{1}{6}x\sqrt{ax}+\frac{2x^2}{5a}\sqrt{ax}=\text{Fläche } AHB.$$

Hiernach läßt sich auch die Fläche AHL quadrieren. Zieht man nämlich von der parabolischen Fläche $ABHL$, deren Quadratur bekannt ist, die gefundene Fläche AHB ab, so bleibt die Fläche AHL übrig[76]). Wenn $AE=\frac{1}{4}a$ ist, wird der Punkt H von allen am höchsten liegen, weil dann die Tangente BH zur Achse parallel ist, und zwar wird $BH=\frac{1}{2}a$ sein, mithin $AL=\frac{3}{4}a$. Wenn dagegen $AE=\frac{3}{4}a$ ist, d. h. wenn der Strahl durch den höchsten Punkt der Kaustik hindurchgeht, werden die Punkte H und L nach J fallen, wo die Kaustik und die Achse sich schneiden, und es wird die Strecke $BJ=a\sqrt{3}$ sein, die Kurve AHJ aber $=\frac{3}{2}a\sqrt{3}$ und die Strecke $AJ=\frac{3}{2}a$, die Fläche $AHJB=\frac{7}{40}a^2\sqrt{3}$ und die Fläche $AHJ=\frac{9}{20}a^2\sqrt{3}$. Die übrigen etwa noch vorhandenen Eigenschaften lassen sich ebenfalls leicht ableiten.

Neunundzwanzigste Vorlesung.

Die zykloidale Kaustik. Die Kaustik der von einem Punkte ausgehenden Strahlen.

Die Regel, die wir für die Bestimmung der Kaustiken gegeben haben, ist nicht nur bei den geometrischen Kurven erfolgreich, sondern sie dehnt sich auch auf die mechanischen aus.

Wir werden in dieser Beziehung die gewöhnliche Zykloide als Beispiel anführen.

Es sei also ABC eine Zykloide, der Scheitel A, die Achse AF, der erzeugende Kreis AMF, der einfallende Strahl EB, der reflektierte BH. Man soll die kaustische Kurve AHN von ihr bestimmen, d. h. man soll die Länge der Strecke BH finden. Es sei der Radius des Kreises $AG = a$, $AE = x$, mithin $EM = \sqrt{2ax - x^2}$, der Bogen $AM = s$, $EB = y = \sqrt{2ax - x^2} + s$. Dann wird sein

$$dy = \frac{(a-x)dx}{\sqrt{2ax - x^2}} + ds = \left(\text{wegen } ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}\right) \frac{(2a-x)dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$= dx \cdot \sqrt{\frac{2a-x}{x}},$$

also

$$dy^2 = \frac{(2a-x)dx^2}{x}$$

und

$$d^2y = -\frac{adx^2}{x\sqrt{2ax-x^2}}.$$

Man erhält daher

$$-\frac{dx^2 + dy^2}{2d^2y} = BH =$$

$$= \sqrt{2ax - x^2} = EM.$$

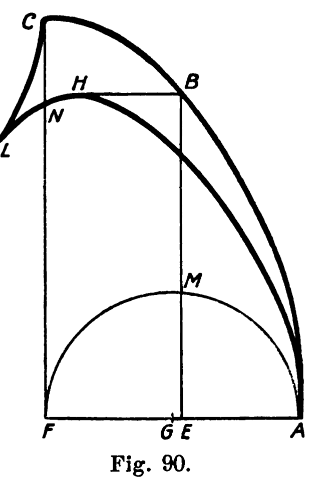


Fig. 90.

Hieraus geht hervor, daß der reflektierte Strahl gleich der entsprechenden Ordinate bei dem erzeugenden Kreise ist und daher doppelt so groß wie der reflektierte Strahl an demselben Kreise. Die Fläche ABH ist gleich der Hälfte des Segments AEM und der doppelten kaustischen Fläche beim Kreise. Wenn der Punkt E in den Mittelpunkt des Kreises G fällt, so wird BH parallel zur Horizontalen AF sein, und daher der Punkt H von allen am höchsten liegen. Diese kaustische Kurve AHN steigt, nachdem sie den höchsten Punkt überschritten hat, wieder herab zu einem gewissen Punkte L und steigt dann wieder auf zum Punkte C. Um den Punkt L zu bestimmen, nehme man $AE = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}AG$. Dann wird der Punkt H in den gesuchten L fallen[77].

Korollar. Die zykloidale Fläche $ABCFA$ ist das Sechsfache der kaustischen Fläche $ABCLHA$. Denn jene ist das Dreifache des Halbkreises AMF, diese aber die Hälfte davon.

Was bis jetzt über die Kaustiken, die von reflektierten Parallelstrahlen gebildet werden, gesagt worden ist, möge genügen. Mit wenigen Worten wollen wir jene berühren, welche die reflektierten der von irgend einem festen Punkte ausgehenden Strahlen beschreiben. Sie sind nämlich den früheren nicht sehr unähnlich und lassen sich mutatis mutandis ebenso leicht der Rechnung unterwerfen.

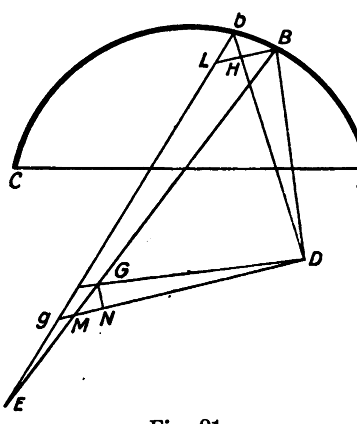


Fig. 91.

Es sei in der Tat ABC (Fig. 91) eine gegebene Kurve und D ein Punkt von gegebener Lage, von dem die Strahlen ausgehen, die auf die Kurve auffallen, wie DB, Db. Die reflektierten Strahlen seien BE, bE. Man soll die Kaustik bestimmen, welche die reflektierten Strahlen bilden oder vielmehr berühren. Hierzu ist also, wie früher, die Länge BE zu finden, die zwischen dem Treffpunkt E und dem Incidenzpunkt B liegt. Zu DB und Db ziehe man die Senkrechten DG und Dg und zu diesen die Parallele BHL[78]). Es sei DB oder $Db = y$, $bH = dy$, $BH = dx$, ferner $BG = z$. Man zeichne das Dreieck DBG besonders (Fig. 92) und halbiere den Winkel DBG durch die Linie BM, die senkrecht zur Kurve Bb sein wird. Dann ist $dx : dy = DB : DM$, und man findet also $DM = ydy : dx$.

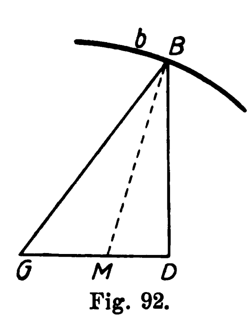


Fig. 92.

Wenn man im übrigen so verfährt, wie es oben bei den Kaustiken geschehen ist, die durch reflektierte Parallelstrahlen gebildet werden, so findet man[79])

$$z = \frac{y\,dy^2 + y\,dx^2}{dx^2 - dy^2},\quad DG = \frac{2y\,dx\,dy}{dx^2 - dy^2}$$

und als Differential davon bei konstant gesetztem dx, d. h. bei der Annahme $d^2x = o$,

$$\frac{2y\,dx^3d^2y - 2dx\,dy^4 + 2y\,dx\,dy^2d^2y + 2dx^3dy^2}{(dx^2 - dy^2)^2} = Dg - DG = gN$$

(Fig. 91). Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke DBH und DGN ist $DB : DG = BH : GN$, also

$$GN = \frac{2\,dx^2dy}{dx^2 - dy^2},$$

und wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke DBG, GNM ist $DB : DG = GN : MN$, d. h.

$$y : \frac{2y\,dx\,dy}{dx^2 - dy^2} = \frac{2\,dx^2dy}{dx^2 - dy^2} : MN,$$

also

$$MN = \frac{4\,dx^3dy^2}{(dx^2 - dy^2)^2}$$

und daher

$$gN - MN = gM = \frac{2y\,dx^3d^2y + 2y\,dx\,dy^2d^2y - 2dx\,dy^4 - 2dx^3dy^2}{(dx^2 - dy^2)^2}.$$

Da aber $BD : DG$ (oder $bD : Dg$) $= bH : HL$ ist, d. h.

$$y : \frac{2y\,dx\,dy}{dx^2 - dy^2} = dy : HL,$$

also

$$HL = \frac{2\,dx\,dy^2}{dx^2 - dy^2},$$

so wird

$$BH + HL = BL = \frac{dx^3 + dx\,dy^2}{dx^2 - dy^2}$$

sein. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke BEL und MEg ist $BE : (ME$ oder $GE) = BL : Mg$ und, wenn man teilt, $BG : BE = (BL - Mg) : BL$. Man setze also an:

$$BL - Mg = \frac{dx^5 + dx\,dy^4 - 2y\,dx^3d^2y - 2y\,dx\,dy^2d^2y + 2dx^3dy^2}{(dx^2 - dy^2)^2}$$

zu

$$BL = \frac{dx^3 + dxdy^2}{dx^2 - dy^2},$$

d. h.

$$\frac{dx^2 + dy^2 - 2yd^2y}{dx^2 - dy^2} \text{ zu } 1,$$

wie

$$BG \text{ oder } z = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dx^2 - dy^2} \text{ zu } BE.$$

Daher wird

$$BE = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dx^2 + dy^2 - 2yd^2y}$$

sein.

So läßt sich also bei jeder beliebigen Kurve die Länge des reflektierten Strahls bestimmen, indem man den Wert von dy und d^2y oder von dx einsetzt, je nachdem das eine oder das andere nach der Natur der gegebenen Kurve AB leichter geschehen kann, so jedoch, daß der Wert von dx oder dx selbst immer konstant gesetzt wird, weil es in der Rechnung so angenommen wurde.

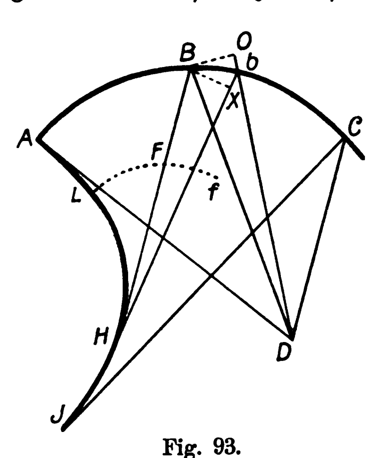


Fig. 93.

Diese kaustische Kurve wird nicht minder eine allgemeine Rektifikation zulassen als die vorige. Es sei nämlich ABC die gegebene Kurve und D der leuchtende Punkt, die kaustische Kurve aber LHI. Sie wird, wenn der Punkt D nicht auf der Tangente der Kurve in A liegt, nicht in diesem Punkte A beginnen, sondern in einem andern L, der von A um die Länge des reflektierten Strahles AL entfernt ist. Man wickle nun die Kaustik LHI ab, und sie beschreibe durch diese Abwicklung die Kurve LFf. Dann läßt sich auf dieselbe Weise, wie es schon gezeigt wurde, nachweisen, daß das Differential bX von BH gleich bO, dem Differential von DB, ist und daher $Db + bH - DA - AL$ gleich dem Kurvenstück LH. Es ist

zu beachten, daß man $DA + AL$ von $Db + bH$ fortnehmen muß; bei verschwindendem bf, d. h. wenn die Kurve HL gleich Null ist, wird nämlich die Summe von Db und bH nicht Null sein, sondern diese werden die Strecken DA, AL sein. Daher muß man die Integrale, die die Rektifikation der Kurve LH zeigen, um die Summe dieser Strecken $DA + AL$ vermindern, und was übrig bleibt, wird der wahre Wert der kaustischen Kurve sein.

Dreißigste Vorlesung.

Über die zirkulare Kaustik der Strahlen, die von einem gegebenen Punkte der Peripherie ausgehen.

Wir werden hier ein Beispiel anführen, wo die kaustische Kurve, die durch die Reflexion aus einem Punkte herkommender Strahlen gebildet wird, an hervorragenden Eigenschaften und nützlicher Spekulation hinter jener andern des *Tschirnhaus* nicht zurücksteht.

Alles nämlich, was Herr *Tschirnhaus* der seinigen zugeschrieben hat, kommt auch dieser zu. Der reflektierte Strahl hat hier wie dort ein konstantes Verhältnis zum einfallenden, ebenso auch die kaustische Fläche, die zwischen dem reflektierten Strahl, der Kreislinie und der Kaustik enthalten ist, zu dem Kreissegment, das der einfallende Strahl abschneidet; und, was wunderbar ist, diese Kaustik erzeugt durch Abwicklung eine andere ihr ähnliche; sie ist nämlich auch eine von den Zykloiden, und zwar eine einfachere als die des *Tschirnhaus*.

Vor allem ist nun ihre Bestimmung zu finden, und daraus werden wir dann alle übrigen Eigenschaften beweisen.

BGD (Fig. 94) sei ein Kreis, auf dessen Peripherie ein Punkt B gegeben wird, von dem die Strahlen BG, Bg usw. ausgehen und auf die Peripherie auffallen. Die reflektierten GL, gL usw. bilden, durch die Schnittpunkte L, die kaustische Kurve BLE. Diese Kurve ist zu bestimmen, d. h. es wird die Länge des reflektierten Strahls GL gesucht. Durch den Punkt B ziehe man den Durchmesser BD und fälle auf ihn die Senkrechten GH, gh. Es sei der halbe Durchmesser $BC = a$, $BH = r$, $HG = t = \sqrt{2ar - r^2}$. Dann wird hH oder $gJ = dr$ sein, $gG = adr : \sqrt{2ar - r^2}$, $BG = y = \sqrt{2ar}$, mithin das Differential davon $gO = adr : \sqrt{2ar} = dy$ und $gG^2 - gO^2 = OG^2$.

Man findet also $OG = adr : \sqrt{4a^2 - 2ar} = dx$, $d^2y = (2ard^2r - adr^2) : 2r\sqrt{2ar}$. Da aber dx konstant gesetzt wird, so wird

$$d^2x = \frac{4a^2d^2r - 2ard^2r + adr^2}{(4a - 2r)\sqrt{4a^2 - 2ar}} = 0$$

sein. Man findet daher

$$d^2r = \frac{dr^2}{2r - 4a}.$$

Setzt man nun den Wert von d^2r ein, so erhält man

$$d^2y = \frac{a^2dr^2}{(r^2 - 2ar)\sqrt{2ar}}.$$

Unter Benutzung der für y, dy, d^2y und dx gefundenen Größen ergibt sich

$$GL = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dx^2 + dy^2 - 2yd^2y} = \tfrac{1}{3}\cdot\sqrt{2ar} = \tfrac{1}{3}\,GB.$$

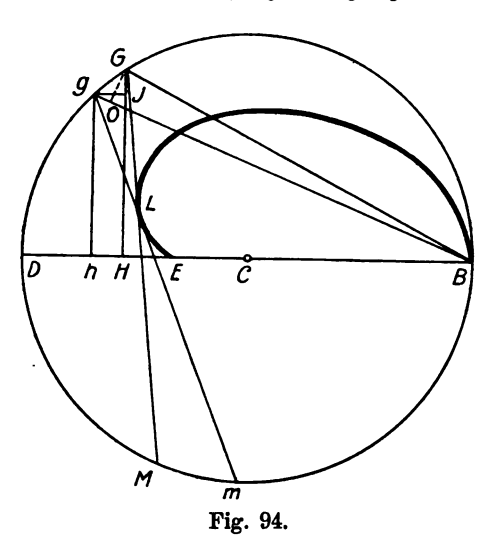


Fig. 94.

Um daher die Kurve BLE zu konstruieren, muß man den reflektierten Strahl GL gleich einem Drittel des einfallenden BG nehmen. Der Punkt L wird dann auf der gesuchten Kurve liegen. Dies läßt sich auch synthetisch nach der Weise von *Tschirnhaus* zeigen.

Man verlängere die reflektierten Strahlen GL, gL, bis sie die Peripherie in den Punkten M, m treffen. Dann wird Bogen gB = Bogen gm sein, und Bogen GB = Bogen GM. Zieht man beiderseits den kleineren vom größeren ab, so bleibt Bogen $gG = Mm - gG$,

mithin $2gG = Mm$. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke MLm und gLG ist aber $ML : (Lg$ oder $LG) = Mm : gG = 2 : 1$, also, wenn man zusammensetzt, $BG : LG = 3 : 1$, wie wir vorhin fanden. Hiernach ist BD dreimal so groß wie DE.

Wir wollen jetzt beweisen, daß diese Kaustik eine Zykloide ist. Es sei nämlich BGD der Kreis, BD ein Durchmesser, BG der einfallende Strahl, GF der reflektierte, BFE die kaustische Kurve. Um den Mittelpunkt A beschreibe man mit dem Radius AE den Kreis MPE, ziehe AG und konstruiere den Kreis GQP, der den reflektierten Strahl GF in Q schneidet. Ich behaupte, daß die Kaustik BFE die Zykloide ist, deren unbeweglicher Kreis MPE, und deren erzeugender Kreis GQP ist. Beide Kreise sind gleich. Der Scheitel der Kurve ist B, und ihr Anfang E.

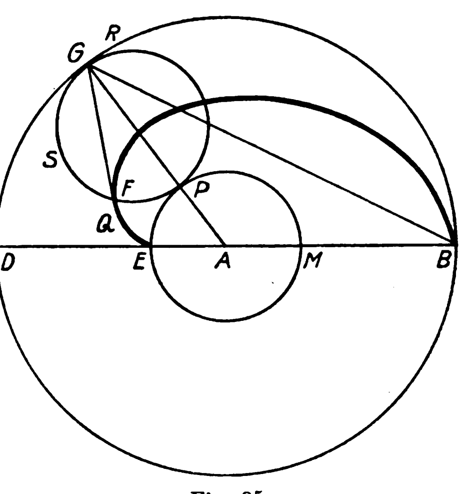


Fig. 95.

Beweis. Der Einfallswinkel BGR ist gleich dem Reflektionswinkel QGD, also das Segment GRB ähnlich dem Segment GSQ. Mithin wird sein

$$\text{Sehne } BG : \text{Sehne } QG = \text{Durchmesser } DB : \text{Durchmesser } GP = 3 : 1 = \text{Sehne } BG : GF,$$

also $QG = FG$. Daher geht der Kreis GQP durch den Berührungspunkt F hindurch. Da aber wegen der Ähnlichkeit der Segmente Bogen $BRG = 3$ Bogen GSF und ebenso Bogen $BRG = 3$ Bogen MP ist, wird Bogen $GSF =$ Bogen MP sein, folglich der Restbogen $FP =$ dem Restbogen PE. Demnach ist die Kaustik BFE eine Zykloide.

Deshalb hat auch diese Kaustik dieselbe Eigenschaft wie die andere, daß sie nämlich durch ihre Abwicklung eine andere ihr ähnliche Kaustik beschreibt.

Aus dem, was über die Zykloiden gesagt worden ist, geht hervor, daß die Kurve BF viermal solang ist wie die Strecke GF, daß die kaustische Fläche BFG das Dreifache des Kreissegmentes GSF, mithin die ganze Fläche $BFED$ gleich dem dreifachen Halbkreis GEP ist. Ferner wird, wenn die Abwicklung der Kaustik BFE in B beginnt, die andere Kaustik, die daraus entsteht, eine zur vorigen umgekehrte Lage haben. Denn der Anfang liegt im Punkte B und der Scheitel auf der Verlängerung der Geraden AD, vom Mittelpunkt A um neun Radien AE entfernt. Daher ist der Kreis, an dem jene Kaustik erzeugt wird, neunmal so groß wie der Kreis, an dem die Kaustik BFE beschrieben wird. Die Fläche, die zwischen der bis zur äußeren Kaustik verlängerten FG, zwischen dem von B aus genommenen Stück dieser Kaustik und der inneren Kaustik BE liegt, ist das Sechzehnfache der Fläche BFG.

Einunddreißigste Vorlesung.

Über die parabolische und die zykloidale Kaustik.

AGg sei eine Parabel, A der Scheitel, AH die Achse, und auf ihr sei ein Punkt B gegeben, der Strahlen BG, Bg aussendet, die reflektiert eine kaustische Kurve bilden. Man soll den Punkt L derselben bestimmen oder die Länge GL finden. Es sei der Parameter $= a$, $AB = b$, $AH = r$, $HG = t = \sqrt{ar}$, $BG = y = \sqrt{r^2 - 2rb + b^2 + ar}$, also $Gi = dr$, $gi = adr : 2\sqrt{ar}$. Man addiere ihre Quadrate. Dann erhält man $(a + 4r)dr^2 : 4r = Gg^2$. Es ist aber

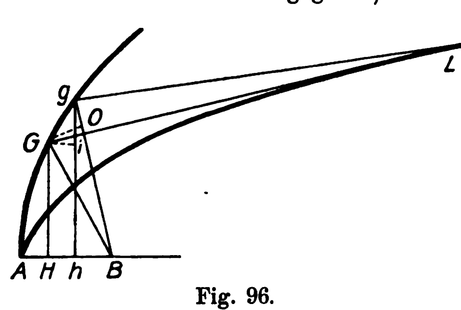


Fig. 96.

$$dy = gO = \frac{2r - 2b + a}{2\sqrt{r^2 - 2rb + b^2 + ar}}$$

und das Quadrat davon

$$dy^2 = \frac{(4r^2 + 4b^2 + a^2 - 8br + 4ar - 4ab)dr^2}{4r^2 - 8rb + 4b^2 + 4ar}.$$

Daher ist

$$Gg^2 - gO^2 = GO^2 = \frac{(ab^2 + ar^2 + 2arb)dr^2}{4r^3 - 8r^2b + 4rb^2 + 4ar^2} = dx^2 = \text{Const.}$$

Von dieser Größe wäre also das Differential zu bilden und gleich Null zu setzen, damit d^2r bekannt wird. Da aber die allgemeine Lösung zu umständlich wäre[80], wollen wir einen Spezialfall nehmen. Es sei also $b = o$, d. h. der Punkt B werde im Scheitel angenommen. Dann wird unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen

$$BG = y = \sqrt{r^2 + ar},\quad Gi = dr,\quad gi = \frac{adr}{2\sqrt{ar}},$$

$$Gg^2 = \frac{(a + 4r)dr^2}{4r} \text{ und } dy^2 = gO^2 = \frac{(4r^2 + 4ar + a^2)dr^2}{4r^2 + 4ar},$$

mithin

$$Gg^2 - gO^2 = GO^2 = \frac{adr^2}{4r + 4a} = dx^2 = \text{Const.},$$

also das Differential davon gleich Null:

$$\frac{8ardrd^2r + 8a^2drd^2r - 4adr^3}{(4r + 4a)^2} = 0.$$

Man findet somit

$$d^2r = \frac{dr^2}{2r + 2a}.$$

Da aber

$$dy = \frac{(2r + a)dr}{\sqrt{4r^2 + 4ar}}$$

ist, so wird

$$d^2y = \frac{-a^2dr^2 + (2rd^2r + ad^2r)\ (2r^2 + 2ar)}{(2r^2 + 2ar)\sqrt{4r^2 + 4ar}}.$$

Setzt man den Wert von d^2r ein, so kommt heraus

$$d^2y = \frac{(-a^2 + 2r^2 + ar)dr^2}{(2r^2 + 2ar)\sqrt{4r^2 + 4ar}}.$$

Da nun

$$dx^2 + dy^2 = Gg^2 = \frac{(a + 4r)dr^2}{4r}$$

ist, so wird

$$\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - 2yd^2y} = \frac{(a + 4r)\sqrt{r^2 + ar}}{3a} = GL.$$

Wenn sich also $3a$ zu BG verhält wie $a + 4r$ zu einer vierten Größe, so wird diese gleich GL sein. Addiert man zu GL die Strecke BG, so ergibt sich

$$\frac{(4a + 4r)\sqrt{r^2 + ar}}{3a} = \text{der kaustischen Kurve } AL.$$

Die kaustische Fläche AGL läßt sich gleichfalls berechnen.

Als Abschluß wollen wir die Bestimmung der Kaustik, die bei der Zykloide durch Reflexion von Parallelstrahlen zur Achse erzeugt wird, hinzufügen, die im vorigen ausgelassen worden ist.

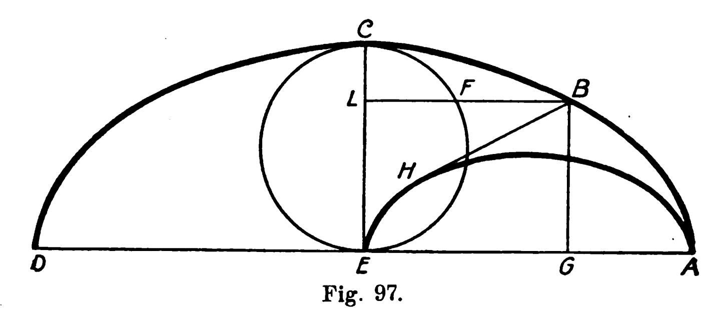


Fig. 97.

ABC sei eine Zykloide, C ihr Scheitel, CE die Achse, CFE der erzeugende Kreis, GB der einfallende, BH der reflektierte Strahl. Gesucht wird die Länge BH. Es sei $EC = 2a$, $CL = r$, Bogen $CF = s$, $LB = t = s + \sqrt{2ar - r^2}$, die halbe Peripherie $CFE = AE = p$. Dann wird sein

$$AG = p - s - \sqrt{2ar - r^2} = x$$

und

$$GB = 2a - r = y,$$

mithin

$$dx = -dr \cdot \sqrt{\frac{2a - r}{r}}.$$

Da aber dx als konstant vorausgesetzt wird, so wird

$$d^2x = \frac{adr^2}{r\sqrt{2ar - r^2}} - d^2r \cdot \sqrt{\frac{2a - r}{r}} = 0$$

sein und daher

$$d^2r = \frac{adr^2}{2ar - r^2}.$$

Da $y = 2a - r$ ist, wird

$$dy = -dr, \text{ mithin } d^2y = -d^2r = -\frac{adr^2}{2ar - r^2}.$$

Man findet daher für $-\frac{dx^2 + dy^2}{2d^2y}$

$$2a - r = y = BG = \text{dem gesuchten } BH.$$

Hiernach ist die Kurve $AH =$ dem doppelten BG, die ganze Kurve $AHE =$ dem doppelten Durchmesser CE, die Fläche $ABH =$ dem halben Segment AGB. Wenn LB durch den Mittelpunkt des Kreises hindurchgeht, so wird der Punkt H von allen der höchste sein. Die Kaustik AHE ist ebenfalls eine Zykloide, deren erzeugender Kreis ein Viertel des Kreises EFC ist.

Zweiunddreißigste Vorlesung.

Über die zykloidale Kaustik.

Daß die kaustische Kurve, die bei einer Zykloide von den reflektierten Parallelstrahlen zur Achse gebildet wird, ebenfalls eine Zykloide ist, wird so bewiesen.

Es sei ABC (Fig. 98) die Zykloide, C ihr Scheitel, EC die Achse, EFC der erzeugende Kreis, GB der einfallende, BH der reflektierte Strahl und AHE die entstehende Kaustik. Ich behaupte, daß diese eine Zykloide ist mit einem erzeugenden Kreis, dessen Durchmesser die Hälfte des Durchmessers EC ist. Man ziehe durch den Punkt B eine Parallele BFP zur Basis; sie schneide den Kreis EFC in den Punkten F und P, die man mit dem Mittelpunkt R durch die Geraden RF, RP verbinde. Man ziehe auch die Gerade EF und zu ihr parallel BM. Nachdem man die Punkte M, H verbunden hat, errichte man die Senkrechte MN, die die Gerade BH in N trifft. Da jetzt nach Konstruktion BM parallel zur Geraden FE ist, wird BM

senkrecht zur Zykloide ABC sein. Daher halbiert BM den Winkel, den der einfallende und der reflektierte Strahl bilden, d. h. es ist $MBG = MBH$. Da aber früher bewiesen wurde, daß $BG = BH$ ist, und da BM gemeinsam ist, so werden die Dreiecke MBG und MBH kongruent sein. Mithin ist $MH = MG$, und Winkel $MHB = MGB =$ einem Rechten.

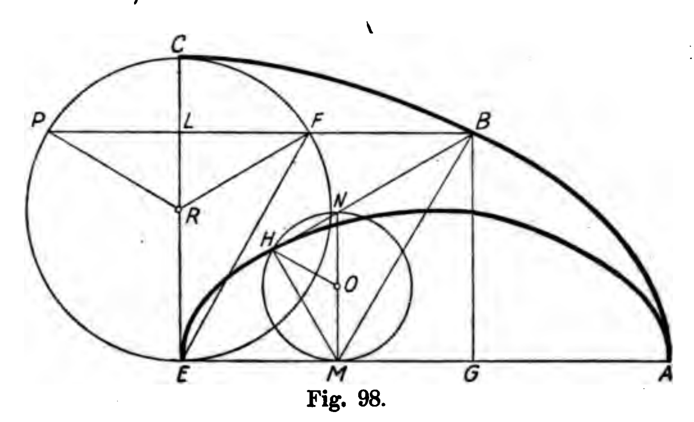


Fig. 98.

Nun beschreibe man über dem Durchmesser MN den Kreis MHN, der wegen des rechten Winkels MHN durch den Punkt H hindurchgehen wird. Von diesem Punkte ziehe man nach dem Mittelpunkt O die Gerade HO. Ich werde dann zeigen, daß der Kreis MHN immer konstant ist, d. h. MN überall gleich ER ist, und daß der Bogen MH gleich der Strecke EM ist. Denn wegen der Kongruenz der Dreiecke MGB und FLE ist MG oder HM gleich LF, und Winkel $BMG = EFL$, also $HMG =$ $= 2 \cdot EFL$, mithin die Ergänzung zu zwei Rechten HME gleich dem Doppelten der Ergänzung zu einem Rechten, d. h. von LEF. Es ist aber Winkel $HME =$ Winkel HNM, also HNM auch $= 2 \cdot LEF$, mithin $HOM = 2 \cdot LRF$ oder $HOM = PRF$. Demnach sind die Dreiecke PRF und HOM ähnlich und daher ist $RF : HO = (PF$, d. h. $2LF) : HM = 2 : 1$, mithin der Durchmesser CE das Doppelte des Durchmessers HM. Der Kreis MHN ist also konstant. Dies ist das eine, das andere wird so bewiesen: Da Winkel $HOM = PRF$, so wird das Segment HM dem Segment PCF ähnlich sein. Daher wird sich die Strecke PF zur Strecke HM (2 zu 1) verhalten, wie Bogen PCF zu Bogen HM. Also ist der halbe Bogen, d. h. CF,

gleich dem Bogen HM. Es ist aber Bogen CF = Strecke FB = Strecke EM, mithin Bogen HM = Strecke EM. Demnach ist AHE eine Zykloide, deren erzeugender Kreis MHN ist und einen Durchmesser MN hat halb so groß wie der Durchmesser EC des erzeugenden Kreises EFC bei der Zykloide ABC.

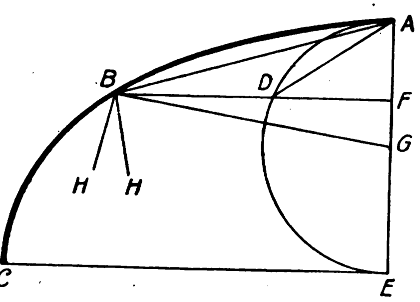


Fig. 99.

Nachdem wir bei der Zykloide beide Kaustiken, sowohl die, die durch Reflexion der zur Achse senkrechten Strahlen entsteht, als auch die, die durch Reflexion der zur Achse parallelen Strahlen entsteht, bestimmt haben, bleibt noch übrig, daß wir auch die bestimmen, die durch Reflexion der von einem Punkte ausgehenden Strahlen entsteht. Es sei also ABC die Zykloide, A ihr Scheitel, ADE der erzeugende Kreis, AE die Achse. Ferner sei A der Punkt, von dem die Strahlen ausgehen, wie z. B. AB usw. Gesucht wird die Länge BH des reflektierten Strahls. Es sei $AE = 2a$, $AF = r$, $AD = DB = s$. Dann wird sein

$$DF = \sqrt{2ar - r^2},\quad AB = y = \sqrt{2ar + s^2 + 2s\sqrt{2ar - r^2}},$$

$$AD = \sqrt{2ar} = \tfrac{1}{2} \text{ Kurve } AB,$$

ferner

$$dy = \frac{adr + sds + (4ards + 2asdr - 2r^2ds - 2rsdr) : \sqrt{2ar - r^2}}{\sqrt{2ar + s^2 + 2s\sqrt{2ar - r^2}}}.$$

Wenn hier der Wert von ds, $adr : \sqrt{2ar - r^2}$, eingesetzt wird, kommt heraus

$$dy = \frac{3adr + (3a - 2r)sdr : \sqrt{2ar - r^2}}{\sqrt{2ar + s^2 + 2s\sqrt{2ar - r^2}}}.$$

Jetzt müßte man dx aufsuchen und dessen Differential gleich Null setzen, um d^2r zu erhalten, dessen Wert in d^2y einzusetzen wäre. Dies läßt sich wegen der gar zu umständlichen

und mühsamen Rechnung fast unmöglich ausführen[81]). Wir wollen deshalb einen leichteren Fall nehmen.

Der leuchtende Punkt liege im Mittelpunkt G des erzeugenden Kreises, der einfallende Strahl sei GB, der reflektierte BH. Es sei jetzt $DF = r$, $AG = a$, $GB = y$, $AD = s = BD$. Dann wird sein

$$GF = \sqrt{a^2 - r^2},\quad BG = y = \sqrt{s^2 + 2rs + a^2},$$

$$\text{Kurve } AB = 2AD = 2\sqrt{2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Zunächst wird

$$dy = \frac{sds + rds + sdr}{\sqrt{s^2 + 2rs + a^2}}.$$

Setzt man hier den Wert von ds, $adr : \sqrt{a^2 - r^2}$, ein, so kommt heraus

$$dy = \frac{(as + ar)dr : \sqrt{a^2 - r^2} + sdr}{\sqrt{s^2 + 2rs + a^2}}.$$

Da diese Größe einfacher ist als die frühere, so wird auch die Rechnung etwas leichter sein, freilich noch umständlich genug und nicht in ein paar Minuten zu erledigen[82]).

Wir wollen jetzt die Kaustiken der Zykloiden verlassen und nur noch eine Bemerkung machen. Die zykloidale Kurve und die logarithmische Spirale haben das gemein, daß jede von ihnen durch ihre Abwicklung dieselbe oder wenigstens eine ähnliche Kurve beschreibt. Ebenso kommt ihnen, was bemerkenswert ist, die gemeinsame Eigenschaft zu, daß bei jeder die kaustische Kurve dieselbe oder eine ähnliche ist, jedoch mit dem Unterschiede, daß die kaustische Kurve bei der Zykloide, die ebenfalls eine Zykloide ist, durch reflektierte Parallelstrahlen hervorgebracht wird, während bei der logarithmischen Spirale die Kaustik, die ebenfalls eine logarithmische Spirale ist, hervorgebracht wird durch Reflexion der vom Mittelpunkt ausgehenden Strahlen. Das erstere ist früher bewiesen worden, das letztere ist jetzt zu beweisen.

bBA sei die logarithmische Spirale, A ihr Mittelpunkt und zugleich der leuchtende Punkt, von dem aus die Strahlen AB, Ab auffallen, die nach Reflexion durch ihre Schnittpunkte C die Kurve CEA bilden. Ich behaupte, daß diese Kurve CEA ebenfalls eine logarithmische Spirale ist, und zwar dieselbe.

Es sei $bD : DB = a : b$ (wegen des überall konstanten Winkels DbB). Setzt man also $AB = y$, so wird $bD = dy$ sein und daher

$$BD = \frac{b\,dy}{a} = dx.$$

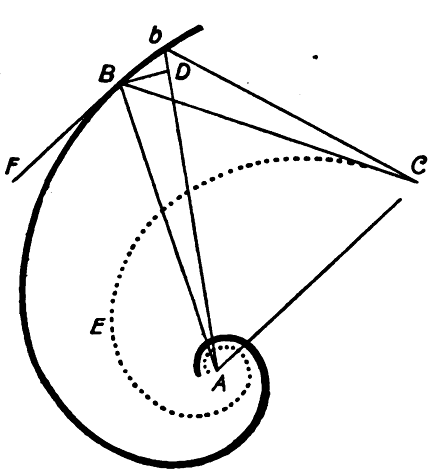


Fig. 100.

Da nun dx konstant angenommen wird, so wird auch $\frac{b\,dy}{a}$ konstant sein, mithin $d^2y = 0$ und daher

$$\frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 + dy^2 - y\,d^2y} = BC = \frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 + dy^2} = y = AB,$$

also $AB = BC$. Man ziehe jetzt die Linie AC. Dann wird Winkel $BAC =$ Winkel BCA sein, und da Winkel $ABF = CBb$ ist, wird Winkel $ABF = BAC = BCA =$ Konst. sein. Daher ist die Kurve CEA eine logarithmische Spirale, und zwar dieselbe wie die Kurve bBA wegen der Gleichheit der Winkel ABF und ACB, und weil CB die Kurve berührt.

Dreiunddreißigste Vorlesung.

Verschiedene physiko-mechanische Probleme und ihre Lösungen. Auffindung der Kurve gleichmäßigen Abstiegs.

Wir haben bisher, wie ich hoffe, zur Genüge die allgemeine Idee der Integralrechnung dargelegt. Dabei haben wir den Gegenstand kurz, jedoch, soweit die Notwendigkeit es erlaubte, klar und durchsichtig entwickelt. Viel, ja sogar unendlich viel bleibt noch übrig, was sich hierauf bezieht, und was wir absichtlich ausgelassen haben; nicht, als ob es sich dem Kalkül entzöge, sondern hauptsächlich, weil wir uns vorgenommen

hatten, seinen Nutzen und seine Allgemeinheit nur durch die Lösung solcher Aufgaben zu zeigen, die zwar in den tieferen Gebieten der Geometrie einigermaßen versteckt sind, aber doch häufig vorkommen. Wenn man daher unsere Methode richtig anwendet, wird das andere, was noch übrig bleibt, sich leicht lösen lassen. Daran möge niemand zweifeln. Ja ich möchte sogar die Behauptung wagen, daß alle lösbaren Probleme, die bis jetzt der Macht der gewöhnlichen Geometrie spotteten und als unmöglich aufgegeben wurden, sich dem Verfahren unserer Integralrechnung unterwerfen. Die Wahrheit dieser Behauptung wird um so deutlicher hervortreten, als ihre Grenzen sich so weit ausdehnen, daß es keinen Teil der konkreten Mathematik gibt, dessen schwierigere und bedeutendere Erfindungen nicht in ihnen enthalten sind, Erfindungen, die sonst, trotz aller zu Hilfe gerufenen *Descartes*schen Geometrie, für immer verborgen blieben. Daß dies sich wirklich so verhält, wird aus den Lösungen gewisser physiko-mechanischer Probleme klar werden, die von den hervorragendsten Mathematikern gestellt worden sind, und deren Lösungen teils nirgends, teils jedoch mit Unterdrückung des Verfahrens zu finden sind.

Das erste, das beachtet zu werden verdient, ist dieses: die Frage ist, von welcher Natur die Kurve ADC sein mag, die folgende Eigenschaft hat. Wenn die Achse BF vertikal aufgerichtet ist, so durchläuft ein auf der Kurve frei herabgleitendes Gewicht in gleichen Zeiten gleiche vertikale Höhen. Gelangt also z. B. ein Gewicht oder eine Kugel, die im Punkte A ihre Bewegung beginnt, in einer Sekunde nach D, in einer zweiten nach C, so soll die vertikale Höhe AF des Punktes C das Doppelte der vertikalen Höhe AE des Punktes D sein, oder wenn die Zeit für AD sich zur Zeit für AF wie p zu q verhält, so soll sich auch AE zu AF verhalten wie p zu q.

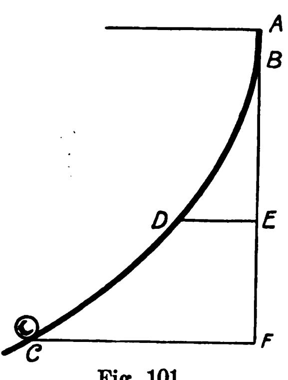


Fig. 101.

Dieses Problem faßt *Leibniz* ungefähr in folgende Worte[83]: Eine Bahn zu finden, auf der ein herabgleitender Körper sich in gleichen Zeiten gleichviel der Horizontalebene nähert.

Zur Lösung desselben muß folgendes vorausgesetzt werden, was schon an sich zur Genüge bekannt ist und auch in jedem Buche über die Natur der Projektile bewiesen wird.

1. Wenn sich ein Körper gleichförmig oder gleichmäßig bewegt, so werden die durchlaufenen Wege den Zeiten proportional sein, und wenn sich zwei Körper mit ungleichen Geschwindigkeiten, aber gleichförmig bewegen, so werden sich die in gleichen Zeiten von ihnen durchlaufenen Wege wie die Geschwindigkeiten verhalten.

2. Wenn ein Körper auf einer vertikalen Geraden frei herabfällt, so werden die durchlaufenen Wege den Quadraten der Zeiten proportional sein.

3. In demselben Falle werden die durchlaufenen Wege den Quadraten der Endgeschwindigkeiten proportional sein, und daher werden die Zeiten sich verhalten wie die Endgeschwindigkeiten.

4. Ein irgendwie, sei es auf einer Geraden oder auf einer Kurve, herabgleitender Körper wird in einem beliebigen Punkte dieselbe Geschwindigkeit erreichen, die er erreichen würde, wenn er von derselben Vertikalhöhe direkt heruntergefallen wäre.

Wenn wir nach diesen Voraussetzungen das Problem mittels der Integralrechnung lösen wollen, müssen wir danach trachten, das auf mechanische Prinzipien sich stützende Problem in ein rein geometrisches zu verwandeln. Dies wird auf folgende Weise durchgeführt.

Die gesuchte Kurve sei ADC (Fig. 102). Wenn der Körper auf ihr zu einem gewissen Punkte C gelangt ist, durchlaufe er in einem Zeitmoment mit seiner erworbenen Geschwindigkeit die unendlich kleine Strecke Cc und die senkrechte Höhe Hc. Es sei jetzt der Körper in irgend einem andern Punkte D und absolviere in dem gleichen Zeitmoment die kleine Strecke Dd und die vertikale Höhe Gd. Da die Zeitmomente gleich groß gedacht werden, so müssen also nach der Annahme auch die Höhen Gd und Hc gleich sein. Nach Voraussetzung 1 verhält sich ferner Dd zu Cc wie die Geschwindigkeit in D zur Geschwindigkeit in C.

Es ist aber[84])

$$\frac{Dd}{Cc} = \frac{Dd}{Gd} \cdot \frac{Hc}{Cc} \qquad \text{(wegen } Gd = Hc\text{)}$$

d. h.

$$= \frac{DK}{ED} \cdot \frac{CF}{CL}.$$

Durch den Punkt C ziehe man zu DK die Parallele CM. Dann wird

$$DK : DE = CM : CF$$

sein, also

$$\frac{DK}{ED} \cdot \frac{FC}{CL} = \frac{CM}{CF} \cdot \frac{CF}{CL} = \frac{CM}{CL}.$$

Demnach verhält sich die Geschwindigkeit in D zur Geschwindigkeit in C wie CM zu CL. Nach Voraussetzung 3 und 4 verhält

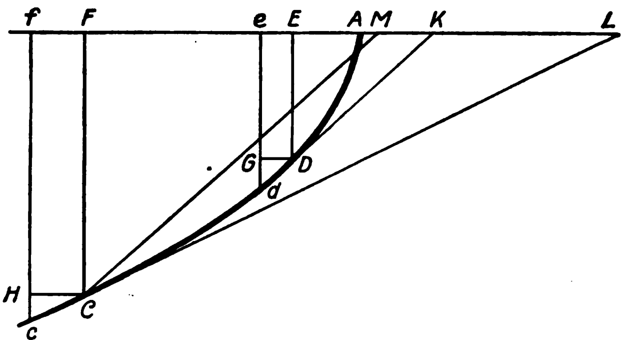


Fig. 102.

sich aber das Quadrat der Geschwindigkeit in D zum Quadrat der Geschwindigkeit in C wie ED zu CF, also auch das Quadrat von CM zum Quadrat von CL wie ED zu CF.

Das vorgelegte Problem ist hiermit zu einem rein geometrischen gemacht und läßt sich in abstrakter Form so stellen:

Eine Kurve ADC mit folgender Eigenschaft zu finden. Zieht man in einem beliebig gewählten Punkte C die Tangente CL und zur Tangente DK in irgend einem andern Punkte D die Parallele CM, so verhält sich das Quadrat von CL zum Quadrat von CM wie CF zu DE.

Um dies zu lösen, sei $AE = x$, $ED = y$, $CF = a$, $CL = b$. Dann wird sein

$$GD = dx \text{ und } Gd = dy, \text{ mithin } Dd = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Es ist aber wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke GdD und FCM

$$Gd : Dd = CF : CM,$$

d. h.

$$dy : \sqrt{dx^2 + dy^2} = a : CM,$$

also

$$CM = \frac{a\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}, \text{ mithin } CM^2 = \frac{a^2dx^2 + a^2dy^2}{dy^2}.$$

Da nun wegen der Eigenschaft der Kurve

$$CL^2 : CM^2 = CF : DE,$$

d. h.

$$b^2 : \frac{a^2dx^2 + a^2dy^2}{dy^2} = a : y$$

ist, so erhält man nach Reduktion der Gleichung

$$b^2ydy^2 - a^3dy^2 = a^3dx^2,$$

mithin

$$dy \cdot \sqrt{b^2y - a^3} = dx \cdot \sqrt{a^3}.$$

Nimmt man die Integrale, so gelangt man zu folgender Gleichung, die die Natur der gesuchten Kurve AD ausdrückt[85]):

$$\left(\frac{2}{3}y - \frac{2}{3}\frac{a^3}{b^2}\right)\sqrt{b^2y - a^3} = x\sqrt{a^3}.$$

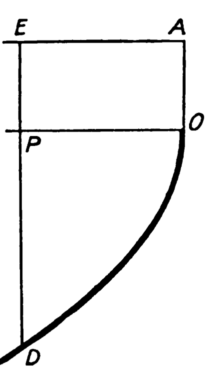


Fig. 103.

Es sei AE, d. h. x, $= o$. Dann wird ED, d. h. y, $= \frac{a^3}{b^2} = AO$. Dies ist ein Zeichen, daß der Körper, bevor er die Kurve erreicht, zunächst vom Punkte A aus auf der Strecke $AO = \frac{a^3}{b^2}$ herabfällt. Wollen wir daher die Gleichung, die die Natur der Kurve durch eine Beziehung der Ordinaten zur Achse PO ausdrückt, so müssen wir setzen

$$DP = DE - AO = y - \frac{a^3}{b^2} = z.$$

Dann verwandelt sich die gefundene Gleichung in folgende

$$\tfrac{2}{3}z\sqrt{b^2z} = x\sqrt{a^3},$$

und wenn man sie rational macht, ergibt sich

$$\frac{4}{9} b^2 z^3 = a^3 x^2 \text{ oder } \frac{9a^3}{4b^2} x^2 = z^3.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Kurve OD eine kubische Parabel zweiter Art ist, deren Parameter $= \frac{9a^3}{4b^2}$.

Vierunddreißigste Vorlesung.

Andere Lösung der Aufgabe von der Kurve gleichmäßigen Abstiegs. Auffindung der parazentrischen Isochrone.

Die Aufgabe, die wir in der vorigen Vorlesung gelöst haben, läßt sich auf folgende Weise leichter lösen, wobei nur ein einziger Buchstabe als bekannt und konstant angenommen wird.

Es sei ADd die gesuchte Kurve, auf der ein Körper in gleichen Zeiten gleichviel zur Horizontalebene herabsinkt. Dann wird das erste Kurvenstückchen Aa, das im gleichen Zeitmoment wie Dd durchlaufen wird, gleich der senkrechten Höhe Gd sein, weil eben das Kurvenstückchen Aa selbst die vertikale Höhe im Punkte A ist. Daher verhält sich die Geschwindigkeit in A zur Geschwindigkeit in D wie Gd zu Dd, steht also zu ihr in einem endlichen Verhältnis. Daraus folgt, daß der Körper in A schon eine erworbene Geschwindigkeit hat. Es ist deshalb nötig, daß der Fall in einem höher gelegenen Punkte L beginnt, derart, daß bei der Ankunft in A jene Geschwindigkeit erreicht ist. Dies vorausgesetzt sei $AL = a$, $AE = x$, $ED = y$, $Ee = dx$ und $Gd = dy$. Es wurde bereits gezeigt, daß die Geschwindigkeit in A sich zur Geschwindigkeit in D verhält wie Gd zu Dd, also wie dy zu $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Es verhält sich aber die Geschwindigkeit in A zur Geschwindigkeit in D wie $\sqrt{AL}$ zu $\sqrt{DE + AL}$ oder, wenn man will,

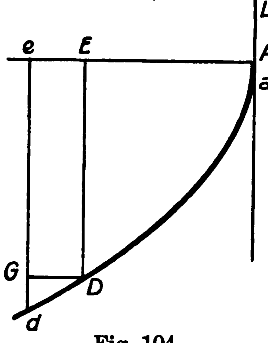


Fig. 104.

das Quadrat der Geschwindigkeit in A zu dem in D wie AL zu $DE + AL$, d. h. wie a zu $y + a$. Mithin ist

$$y dy^2 + a dy^2 = a dx^2 + a dy^2$$

und

$$dy \cdot \sqrt{y} = dx \cdot \sqrt{a}$$

und, wenn man integriert,

$$\tfrac{2}{3} y \sqrt{y} = x \sqrt{a} \quad \text{oder} \quad \tfrac{4}{9} y^3 = a x^2$$

oder endlich

$$y^3 = \tfrac{9}{4} a x^2.$$

Dies zeigt, daß die Kurve ADd eine kubische Parabel zweiter Art ist, deren Parameter $= \frac{9}{4} a = \frac{9}{4} LA$.

Will man nun eine andere Kurve finden, durch deren Abwicklung jene Parabel beschrieben wird, so muß man im Punkte D eine Senkrechte DR ziehen, die gleich

$$\frac{2y + 2a}{a} \cdot \sqrt{y^2 + ay}$$

ist[86]). Dann wird der Punkt R auf der gesuchten Kurve AR liegen. Sie hat die Eigenschaft, daß ein am Ende D des Fadens RD angehängter Körper, dem im Punkte A die Geschwindigkeit erteilt wird, die er beim Herabfallen von L erreichen würde, unter Abwicklung des Fadens von der Kurve AR die Kurve AD beschreibt und daher in gleichen Zeiten gleichviel zur Horizontalebene herabsinkt.

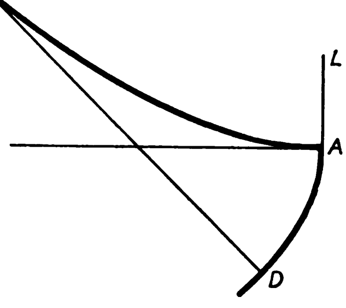


Fig. 105.

Wir haben bis jetzt gesehen, daß die Kurve, auf der ein Körper gleichmäßig der Horizontalebene sich nähert, eine kubische Parabel zweiter Art ist. Jetzt wollen wir sehen, wie beschaffen die Kurve sein muß, auf der herabgleitend ein Körper sich gleichmäßig einem Punkte gegebener Lage nähert.

Um diese Aufgabe zu lösen, sind dieselben Voraussetzungen zugrunde zu legen wie beim vorigen Falle, und zwar werden wir sie auf zwei Arten lösen können. Die eine ist jener nicht unähnlich, die wir bei der vorigen Aufgabe zuerst angewandt

haben, die andere ist fast dieselbe wie die zweite bei der vorigen Aufgabe. Da aber jene etwas weitschweifig ausfällt, und überdies dabei mehr Buchstaben anzuwenden sind, so wollen wir sie auslassen und die zweite in Angriff nehmen.

F sei ein seiner Lage nach gegebener Punkt. Man ziehe durch ihn die Vertikallinie FAL und wähle auf ihr nach Belieben den Punkt A als Anfangspunkt der gesuchten Kurve ADd. Man stelle sich vor, der herabgleitende Körper sei zu einem Punkte d gelangt und habe in einem Zeitmoment die kleine Strecke Dd durchlaufen. Zieht man also die Geraden FD, Fd und beschreibt um den Mittelpunkt F den kleinen Bogen dH, so wird der Rest DH zeigen, um wieviel der Körper in einem Zeitmoment dem Punkt F näherrückt. Da aber am Anfang der Kurve der Körper direkt in der Richtung nach F herabsinkt, so wird das Kurvenstückchen Aa, das in einem Zeitmoment durchlaufen wird, nach Voraussetzung gleich DH sein. Hieraus folgt wie früher, daß der Körper in A schon eine erworbene Geschwindigkeit besitzen muß. Es sei also AL jene Höhe, von der der Körper herabfallen muß, um diese Geschwindigkeit zu erlangen. Man setze jetzt $AL = a$, $AF = b$, $AE = OD = x$, $ED = AO = y$, $eE = GD = dx$, $Gd = dy$, $Dd = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Dann wird sein

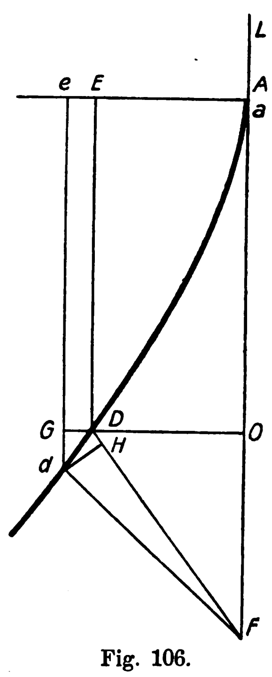


Fig. 106.

$$FO = b - y,\quad FD = \sqrt{b^2 - 2by + y^2 + x^2}$$

und das Differential von FD

$$\frac{-bdy + ydy + xdx}{\sqrt{b^2 - 2by + y^2 + x^2}} = DH$$

Da sich nun Dd zu Aa oder DH verhält wie die Geschwindigkeit in D zur Geschwindigkeit in A, so wird sich das Quadrat von Dd zum Quadrat von DH verhalten wie das Quadrat der

Geschwindigkeit in D zum Quadrat der Geschwindigkeit in A, d. h. wie $ED + AL$ zu AL. Es ist also

$$(dx^2 + dy^2) : \frac{(b^2 - 2by + y^2)dy^2 + (-2bx + 2xy)dxdy + x^2dx^2}{b^2 - 2by + y^2 + x^2} = (y + a) : a.$$

Wenn man die Proportion auf eine Gleichung bringt, so kommt heraus:

$$(ab^2 - 2aby + ay^2)dx^2 + ax^2dy^2 = (b^2y - 2by^2 + y^3)dy^2 + (-2bxy + 2xy^2)dxdy + (-2abx + 2axy)dxdy + x^2y\,dx^2.$$

Um diese Gleichung auf weniger Glieder zu reduzieren, setze man $b - y$, d. h. FO, $= z$. Dann ergibt sich

$$az^2dx^2 + ax^2dz^2 = bz^2dz^2 - z^3dx^2 + (2bxz - 2xz^2)dxdz + 2axzdxdz + bx^2dx^2 - zx^2dx^2.$$

Jetzt ist nach den Formeln für quadratische Gleichungen der Wert von dx oder dz zu suchen und, wenn es möglich ist, beiderseits das Integral zu nehmen. Die dann sich ergebende Gleichung wird die Natur der gesuchten Kurve zeigen. Nehmen wir einen speziellen Fall, und setzen wir voraus, der Punkt F liege in A, d. h. b sei gleich Null[87]). Dann erhalten wir unter Beibehaltung der Buchstaben der früheren Gleichung

$$ay^2dx^2 + ax^2dy^2 = y^3dy^2 + 2xy^2dxdy + 2axydxdy + x^2y\,dx^2,$$

also

$$dx^2 = \frac{2xy^2dxdy + 2axydxdy + y^3dy^2 - ax^2dy^2}{ay^2 - x^2y},$$

mithin

$$dx = dy \cdot \frac{xy^2 + axy \pm (x^2 + y^2)\sqrt{ay}}{ay^2 - x^2y}.$$

Nimmt man, wenn es möglich ist, beiderseits die Integrale, so erhält man die Natur der Kurve.

Um eine andere Gleichung in den Differentialgrößen zu finden, die aus weniger Gliedern besteht, muß man andere Größen als Unbestimmte annehmen. Wenn dann deren gegenseitige Beziehung bekannt wird, ist die gesuchte Kurve nicht weniger bestimmt als auf die vorige Weise. Man nenne daher $AD = x$ und setze das übrige wie früher, also $CD = y$, $AL = a$,

$dG = dy$ (Fig. 107). Dann wird diesmal $dH = dx =$ dem ersten Stückchen Aa sein, $AC = \sqrt{x^2 - y^2}$ und das Differential Cc oder $DG = (xdx - ydy) : \sqrt{x^2 - y^2}$, $GD^2 + Gd^2 = Dd^2$. Man findet also

$$Dd^2 = \frac{x^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2}{x^2 - y^2}.$$

Es verhält sich aber das Quadrat von Dd zum Quadrat von Aa oder dH wie das Quadrat der Geschwindigkeit in D zum Quadrat der Geschwindigkeit in A, d. h. wie $DC + AL$ zu AL. Demnach ist

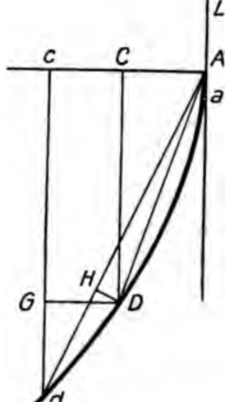


Fig. 107.

$$\frac{x^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2}{x^2 - y^2} : dx^2 =$$
$$= (y + a) : a,$$

mithin

$$yx^2dx^2 - y^3dx^2 - ay^2dx^2 =$$
$$= ax^2dy^2 - 2axydxdy.$$

Man addiere beiderseits ay^2dx^2 und dividiere durch a. Dann erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{dx \cdot \sqrt{yx^2 - y^3}}{\sqrt{a}} = xdy - ydx.$$

Diese Gleichung ist einfacher als die frühere. Wollen wir sie in die andere verwandeln, durch die die Beziehung der Abszisse AC zur Ordinate CD ausgedrückt wird, so bezeichne man AC mit z und setze statt x ein $\sqrt{z^2 + y^2}$, statt dx aber $(zdz + ydy) : \sqrt{z^2 + y^2}$. Dann verwandelt sich die gefundene Gleichung in folgende

$$\frac{(zdz + ydy)\sqrt{\frac{yz^2}{a}}}{\sqrt{z^2 + y^2}} = dy \cdot \sqrt{z^2 + y^2} - \frac{yzdz + y^2dy}{\sqrt{z^2 + y^2}}$$

oder nach Reduktion der Gleichung in

$$(zdz + ydy)\sqrt{y} = (zdy - ydz)\sqrt{a}$$

oder, wenn man $y = m^2 : a$ setzt, in

$$2m^3dm + a^2zdz = 2a^2zdm - a^2mdz.$$

Lassen sich aus diesen Größen nach den bei der umgekehrten Tangentenmethode angegebenen Regeln die Integrale nehmen, so ergibt sich daraus die Natur der Kurve[88]).

Fünfunddreißigste Vorlesung.

Auffindung der Isochrone oder Tautochrone.

Wir wollen uns jetzt einem andern Problem zuwenden, das Herr *Huygens* gelöst hat[89]), und das, wie er zeigte, von nicht geringem Nutzen bei den Pendeluhren oder Schwingungsuhren ist. Es ist nämlich bekannt, daß die kreisförmigen Schwingungen nicht in gleichen Zeiten ausgeführt werden, da sie einen kleineren Bogen in kürzerer Zeit als einen größeren beschreiben. Daher können kreisförmige Schwingungen bei den Uhren nicht in Anwendung kommen. Sonst würde nämlich die Zeit nicht gleichmäßig gemessen werden.

Um nun diesem Übelstande zu begegnen, wird folgendes Problem gestellt:

Eine Kurve zu finden, die so beschaffen ist, daß ein Körper, der auf ihr irgendwo herabzugleiten beginnt, stets in dem gleichen Zeitraum zum untersten Punkte der Kurve gelangt.

Der Sinn dieses Problems ist folgender. Man soll eine Kurve ABC, deren Achse AD vertikal ist, finden von solcher Art, daß der Körper B, der von irgend einem Punkte B auf der Kurve herabgleitet, in derselben Zeit nach A gelangt, als wenn er von einem andern Punkte C herabgeglitten wäre. D. h. wenn zwei in B, C befindliche Körper gleichzeitig herabzugleiten beginnen, so sollen sie in demselben Zeitpunkt an der untersten Stelle A zusammentreffen.

Um dies zu lösen, finden dieselben Voraussetzungen, die wir bei den vorigen Aufgaben gemacht haben, statt. Damit die Teilungen die Auffassung weniger verwirren, setze man das Kurvenstück AB auf die andere Seite. Man teile AC in unendlich viele gleiche Teile Ac, cd, de, ef, fg usw. und das Stück AB in ebensoviele gleiche Teile Ab, bl, lm, mn usw. Unsere Kurve muß nun von solcher Art sein, daß das Teilchen Ci in derselben Zeit durchlaufen wird wie das Teilchen Bq und ih in derselben Zeit wie qp, hg in derselben Zeit wie po, gf in derselben Zeit wie on und so fort. Auf diese Weise wird

nämlich das ganze Stück CA in derselben Zeit durchmessen wie BA. Nachdem man dies gut eingesehen hat, bemerke man folgendes: Da die Stückchen Ab, Ac in dem gleichen

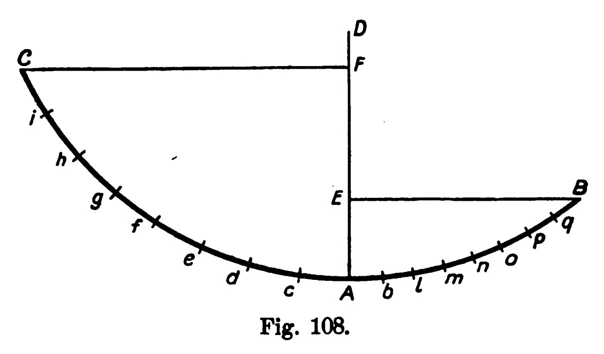


Fig. 108.

Zeitmoment durchlaufen werden, wird sich die Geschwindigkeit in b zur Geschwindigkeit in c verhalten wie bA zu cA, d. h. wie das ganze Stück BA zu dem ganzen Stück CA, mithin das Quadrat der Geschwindigkeit in b zum Quadrat der Geschwindigkeit in c wie das Quadrat von BA zum Quadrat von CA. Es verhält sich aber das Quadrat der Geschwindigkeit in b zum Quadrat der Geschwindigkeit in c wie die vertikale Höhe AE zu der vertikalen Höhe AF, also das Quadrat von AB zum Quadrat von AC wie AE zu AF. Somit ist das mechanische Problem in ein geometrisches übergeführt, das darauf hinauskommt, eine Kurve zu finden, bei der die Quadrate beliebiger Stücke AB, AC den Abszissen AE, AF proportional sind, d. h.

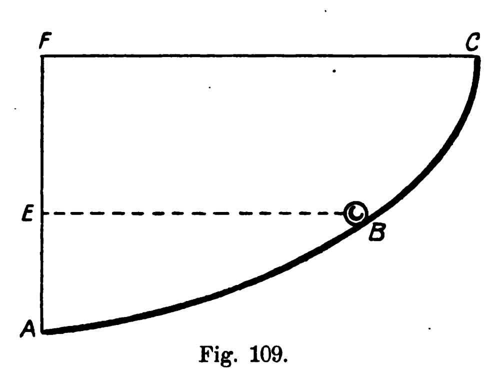


Fig. 109.

$$AB^2 : AC^2 = AE : AF,$$

mithin AB^2 zu AE in konstantem Verhältnis.

Dieses Verhältnis sei nun wie a zu 1, ferner sei $AE = x$, $EB = y$, $AB = s$, also nach der gefundenen Eigenschaft

$$a : 1 = s^2 : x.$$

Diese Proportion gibt, wenn man sie auf eine Gleichung reduziert,

$$s^2 = ax,$$

also

$$s = \sqrt{ax}$$

und, wenn man differenziert,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}.$$

Man nehme die Quadrate:

$$dx^2 + dy^2 = \frac{adx^2}{4x} \text{ oder } 4xdx^2 + 4xdy^2 = adx^2$$

und

$$4xdy^2 = adx^2 - 4xdx^2.$$

Zieht man die Wurzeln, so kommt

$$dy\sqrt{4x} = dx\sqrt{a - 4x},$$

mithin

$$dy = \frac{dx\sqrt{a-4x}}{\sqrt{4x}} = \frac{dx\sqrt{\frac{1}{4}a - x}}{\sqrt{x}} = \frac{(\frac{1}{4}a - x)dx}{\sqrt{\frac{1}{4}ax - x^2}}$$

$$= \frac{(\frac{1}{8}a - x)dx}{\sqrt{\frac{1}{4}ax - x^2}} + \frac{\frac{1}{8}adx}{\sqrt{\frac{1}{4}ax - x^2}}$$

und, wenn man die Integrale nimmt,

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{4}ax - x^2} + \text{Integr. } \frac{\frac{1}{8}adx}{\sqrt{\frac{1}{4}ax - x^2}}.$$

Dieses Integral erhält man aber, wenn man einen Halbkreis AGF herstellt, dessen Durchmesser $AF = \frac{1}{4}a$ ist (Fig. 110); wenn dann $AE = x$ ist, wird

$$\text{Bogen } AG = \text{Integr. } \frac{\frac{1}{8}adx}{\sqrt{\frac{1}{4}ax - x^2}}$$

sein. Es ist aber

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}ax - x^2} = EG,$$

folglich

$$EB = y = EG + GA \text{ oder } GA = GB.$$

Hieraus geht hervor, daß die Kurve AB eine Zykloide ist. Dies hätte auch vor der Rechnung aus folgendem sich ergeben:

Die zykloidale Kurve AB ist das Doppelte der Strecke AG, die Quadrate der Strecken AG aber verhalten sich, da sie gleich den Rechtecken $FA \cdot AE$ sind, wie die Abszissen AE.

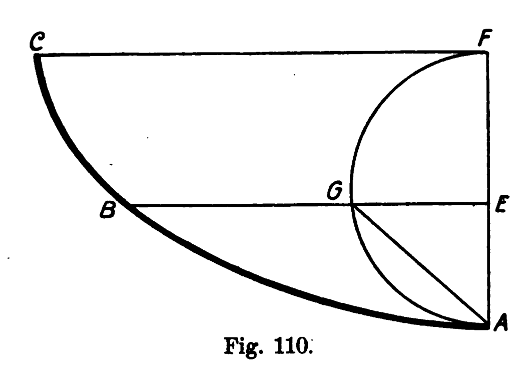


Fig. 110.

Daher verhalten sich auch die Quadrate der Stücke AB wie die Abszissen.

Hieraus läßt sich jetzt leicht ein synthetischer Beweis dafür ziehen, daß ein Körper auf der Zykloide überall

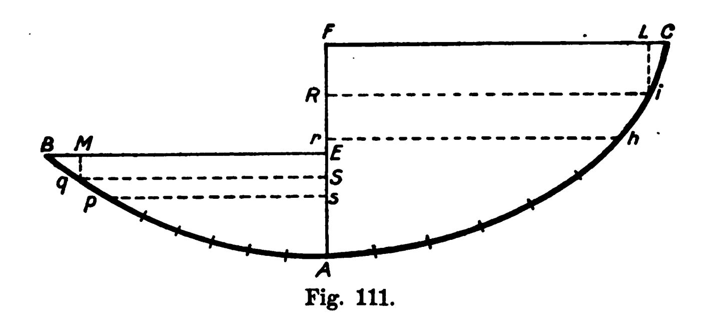


Fig. 111.

in gleichen Zeiten nach unten gelangt. Es sei nämlich BAC die Zykloide, und es mögen zwei Körper den Abstieg beginnen, der eine in B, der andere in C. Ich behaupte, daß diese Körper in der gleichen Zeit nach A gelangen. Man teile in der Tat die beiden Stücke in unendlich viele Teile in

gleicher Anzahl, und es stehe qp auf BA an der Stelle, wo ih auf CA sich befindet. Nun schließe ich so:

$$FA : EA = CA^2 : BA^2 = ih^2 : qp^2 = Ai^2 : Aq^2 = AR : AS,$$

mithin

$$FA : EA = AR : AS,$$

also auch

$$(FR \text{ oder } Li) : (ES \text{ oder } Mq) = ih^2 : qp^2.$$

Es verhält sich aber Li zu Mq wie das Quadrat der Geschwindigkeit in i zum Quadrat der Geschwindigkeit in q, mithin ih^2 zu qp^2 wie das Quadrat der Geschwindigkeit in i zum Quadrat der Geschwindigkeit in q, also ih zu qp wie die Geschwindigkeit in i zur Geschwindigkeit in q. Das Stückchen ih wird demnach in derselben Zeit durchlaufen wie das Stückchen qp. Was von diesen beiden bewiesen ist, läßt sich in gleicher Weise auch für alle andern beweisen. Daher wird das ganze Stück CA in derselben Zeit durchlaufen wie das ganze Stück BA[90]).

Dieser Beweis hatte nicht einen so großes Apparat nötig wie jener des *P. Pardies*, der sein konfuses Chaos noch dazu mit der in aller Kürze bewiesenen Erfindung des *Huygens* vergleichen wollte.

Wollen wir nun auf bequeme Weise bewirken, daß die

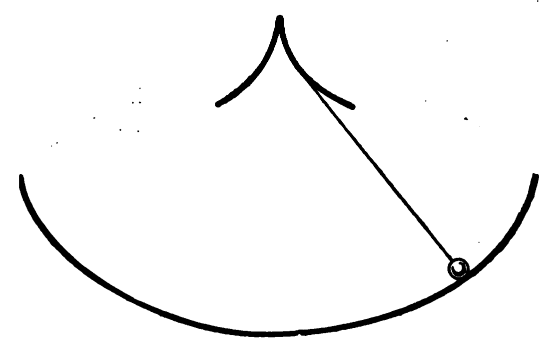


Fig. 112.

Schwingungen in gleichen Zeiten vor sich gehen, so sind zwei gleiche Zykloiden zu konstruieren, ABC und ADE, deren Achsen vertikal sind, und es ist ein der halben Zykloide

gleicher Faden im Punkte A zu befestigen. An das andere Ende hänge man das Gewicht P. Dann werden die Schwingungen des Gewichtes P isochron sein. Denn durch die Abwicklung der Zykloide ABC oder ADE wird eine andere Zykloide QPR beschrieben, die also in gleichen Zeiten durchlaufen werden wird.

Sechsunddreißigste Vorlesung.

Über die Seil- oder Kettenlinien.

Welche Wichtigkeit das Problem der Kettenlinie in der Geometrie besitzt, kann man aus den drei Lösungen ersehen, die in den Leipziger Acta des vorigen Jahres (1691) stehen, und hauptsächlich aus den Bemerkungen, die der berühmte *Leibniz*[91]) dort macht. Der erste, der über diese Kurve nachgedacht hat, die von einem frei hängenden Faden oder besser von einer dünnen unausdehnbaren Kette gebildet wird, war *Galilei*. Er drang aber nicht in ihr Wesen ein, behauptete vielmehr, sie sei eine Parabel, was sie jedoch keineswegs ist. *Joachim Jungius* bekam, wie Herr *Leibniz* bemerkt, durch Rechnung und viele Versuche, die er anstellte, heraus, daß sie keine Parabel ist. Jedoch hat er die wahre Kurve nicht angegeben. Daher blieb die Lösung dieses wichtigen Problems unserer Zeit vorbehalten. Wir bringen sie hier zugleich mit der Rechnung, die in den Acta der Lösung nicht beigefügt ist, zur Darstellung.

Es gibt übrigens zwei Arten von Kettenlinien, die gemeine, die von einem Faden oder einer Kette gleichmäßiger Dicke gebildet wird oder in allen ihren Punkten gleichmäßig beschwert ist, und die nicht gemeine, die von einem Faden ungleichmäßiger Dicke gebildet wird, der also in allen seinen Punkten ungleichmäßig beschwert ist, und zwar im Verhältnis der Ordinaten irgendeiner gegebenen Kurve.

Bevor wir an die Lösung herangehen, sind folgende Voraussetzungen voranzuschicken, die aus der Statik leicht bewiesen werden können.

1. Der Faden, das Seil, die Kette, oder was immer die Kurve darstellt, wird in allen seinen Punkten als biegsam und unausdehnbar angenommen, d. h. es erfährt wegen seiner Schwere keine Ausdehnung.

2. Wenn die Kettenlinie ABC in irgend zwei Punkten A und C festgehalten wird, so werden die Kräfte, die in den Punkten A und C erforderlich sind, dieselben sein, die zum Halten eines Gewichtes D gehören, das gleich dem Gewicht der Kette ABC ist und sich im Treffpunkt zweier gewichtsloser Fäden AD, CD befindet, welche die Kurve ABC in den Punkten A und C berühren. Der Grund hierfür ist klar; denn das Gewicht der Kette ABC übt seine Wirkung in A und C nach einer Richtung aus, d. h. nach den Tangenten AD, CD, und der Zug desselben oder des gleichen Gewichtes D in A und C geht ebenfalls nach den Geraden AD und CD. Daher müssen auch die in den Punkten A und C erforderlichen Kräfte in beiden Fällen dieselben sein. Hiernach erhält man die Kraft, die im untersten Punkte B nötig ist, wenn man die Kraft sucht, die das Gewicht E in demselben Punkte ausübt, wenn es von zwei gewichtslosen Fäden gehalten wird, deren einer die Kurve in B berührt, also horizontal ist, während der andere sie im Punkte A berührt.

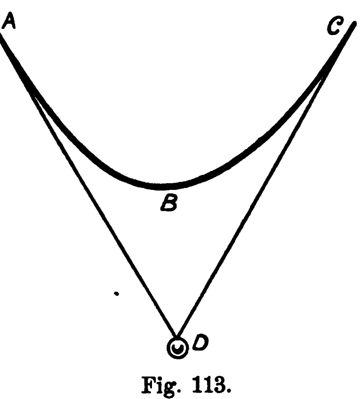


Fig. 113.

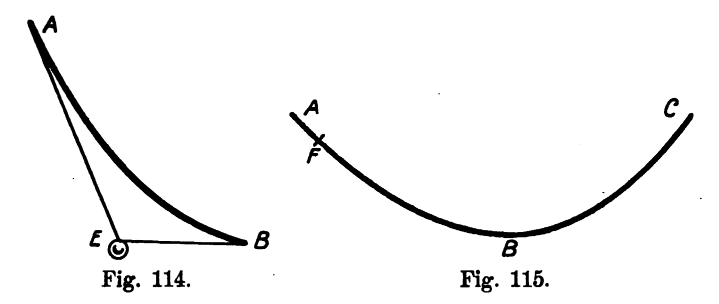


Fig. 114. Fig. 115.

3. Wenn eine in zwei Punkten A und C befestigte Kette in irgendeinem andern Punkte F festgemacht wird, so daß man den Teil AF fortnehmen kann, ändert sich die Kurve, die das

übrige Kettenstück FBC darstellt, nicht, d. h. die übrigen Punkte werden in derselben Lage, die sie vor der Festmachung hatten, bleiben.

Dies bedarf keines Beweises. Denn die Vernunft rät dazu und die Erfahrung stellt es uns täglich vor die Augen.

4. Behalten wir die vorigen Annahmen bei, so ist vor und nach der Festmachung dieselbe, d. h. die ursprüngliche Kraft an den einzelnen Stellen der Kurve nötig, oder es wird, was auf dasselbe hinauskommt, ein Punkt nach der Festmachung mit derselben Kraft gezogen werden, mit der er vor der Festmachung gezogen wird. Dies ist nichts anderes als ein Korollar der vorigen Nummer. Hiernach wird, wie man auch die Kette BFA verlängern oder verkürzen mag, d. h. wo man auch den Befestigungspunkt F wählen mag, die Kraft an der untersten Stelle B weder vermehrt, noch vermindert werden, sondern immer dieselbe und die gleiche bleiben.

5. Das Gewicht P, das durch zwei irgendwie gelegene Fäden AB, CB gehalten wird, übt seine Kräfte in einem solchen Verhältnis auf die Punkte A und C aus, daß die in A nötige Kraft sich zu der in C nötigen Kraft verhält wie (nach Ziehen der Vertikalen BG) der Sinus des Winkels CBG zum Sinus des Winkels ABG und das Gewicht P zu der einen Kraft in C wie der Sinus des ganzen Winkels ABC zu dem Sinus des entgegengesetzten Winkels ABG. Dies wird in jeder Statik bewiesen.

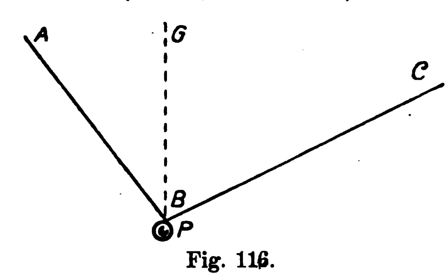


Fig. 116.

Dies vorausgesetzt, finden wir die gemeine Kettenlinie auf folgende Weise. BAa sei die gesuchte Kurve, B ihr tiefster Punkt, die Achse oder die durch B hindurchgehende Vertikale BG, die Tangente im tiefsten Punkte, die horizontal sein wird, BE, und AE die Tangente in irgendeinem anderen Punkte A. Man ziehe die Ordinate AG und die Parallele EL zur Achse. Es sei $BG = x$, $GA = y$, $Gg = dx$, $Ha = dy$, und das Gewicht der Kette oder, weil sie gleichmäßig dick ist, die Länge der Kurve $BA = s$. Da nun im Punkte B immer eine gleiche und konstante Kraft erfordert wird (nach Voraus-

setzung 4), sei es, daß die Kette verlängert, sei es, daß sie verkürzt wird, so sei jene Kraft oder die sie ausdrückende Strecke $C = a$. Man denke sich jetzt das Gewicht der Kette AB konzentriert und aufgehängt im Treffpunkt E der berührenden Fäden AE, BE; dann wird (nach Voraussetzung 2) im Punkte B dieselbe Kraft zum Halten des Gewichtes E erfordert, wie sie vorher zum Halten der Kette BA nötig war. Es verhält sich aber (nach Voraussetzung 5) das Gewicht E zur Kraft in B, wie der Sinus des Winkels AEB oder seiner Ergänzung zu zwei Rechten EAL zum Sinus des Winkels AEL, d. h. wie EL zu AL. Wo man also auch auf der Kurve den Festmachungspunkt A wählt (die Kurve bleibt nach Voraussetzung 3 immer dieselbe), verhält sich das Gewicht der Kette AB zur Kraft in B wie EL zu AL, d. h. es ist

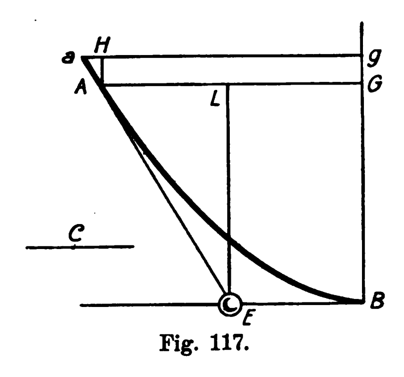


Fig. 117.

$$s : a = EL : AL = AH : Ha = dx : dy$$

und, wenn man umkehrt,

$$dy : dx = a : s.$$

Hieraus geht hervor, daß die Kettenlinie BA dieselbe ist, deren Konstruktion und Natur wir oben bei der umgekehrten Tangentenmethode gegeben haben (vgl. Seite 50), wo wir zuerst die Proportion $dy : dx = a : s$ in folgende Gleichung überführten

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{2\,ax + x^2}},$$

worauf dann die Kurve durch Rektifikation der Parabel wie auch durch Quadratur der Hyperbelfläche konstruiert wurde.

Siebenunddreißigste Vorlesung.

Fortsetzung desselben Gegenstandes. Über die Seil- oder Kettenlinien.

Damit die Richtigkeit unserer Lösung noch klarer wird, wollen wir prüfen, ob sie mit der Lösung des Herrn Leibniz übereinstimmt. Seine Konstruktion der Kettenlinie ist von folgender Art:

Es sei NCP eine unbegrenzte horizontale Gerade, und über ihr werde die logarithmische Kurve $OMBQ$ beschrieben[92]), deren Subtangente also überall die gleiche oder konstant ist. Man suche die Ordinate CB heraus, die der Subtangente gleich ist, und nehme nach beiden Seiten hin zwei beliebige gleiche Stücke CD, CP. Nun mache man DA gleich der halben Summe der Ordinaten DM, PQ. Dann behauptet er, daß der Punkt A auf einer Kettenlinie liegt.

Fig. 118.

Um zu untersuchen, ob diese Kurve dieselbe wie die von uns angegebene ist, muß man zusehen, ob die Natur der Kurve BA durch dieselbe Differentialgleichung ausgedrückt wird. Es sei daher CB oder die Subtangente $= a$, $BG = x$, $GA = CD = y$, $DM = z$, $Gg = dx$, $Dd = Ha = dy$. Dann wird nach der Natur der logarithmischen Kurve $z dy = a dz$ sein, mithin

$$dz = \frac{z dy}{a}.$$

Da nach der Konstruktion $CD = CP$ ist, so wird $DM : CB =$

$= CB : PQ$ sein, mithin $PQ = a^2 : z$ und $\frac{1}{2}DM + \frac{1}{2}PQ$, d. h. nach Konstruktion DA,

$$= \frac{a^2 + z^2}{2z} = CB + BG = a + x,$$

also

$$z^2 = 2az + 2xz - a^2.$$

Diese Gleichung gibt, wenn man sie auflöst,

$$z = a + x + \sqrt{2ax + x^2},$$

also

$$dz = dx + \frac{(a + x)\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}}.$$

Setzt man den Wert von z in die frühere Gleichung $dz = \frac{z\,dy}{a}$ ein, so kommt heraus

$$dx + \frac{(a + x)\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{ady + xdy + dy \cdot \sqrt{2ax + x^2}}{a}$$

oder

$$\frac{adx \cdot \sqrt{2ax + x^2} + a^2dx + axdx}{\sqrt{2ax + x^2}} = ady + xdy + dy \cdot \sqrt{2ax + x^2}.$$

Dividiert man auf beiden Seiten mit $a + x + \sqrt{2ax + x^2}$, so erhält man

$$\frac{adx}{\sqrt{2ax + x^2}} = dy.$$

Da diese Gleichung dieselbe ist wie die, welche wir gefunden haben, so folgt, daß auch die Kurve BA unsere Kettenlinie ist, und daß die *Leibniz*sche Konstruktion, so verschieden sie auch von der oben von uns gegebenen sein mag, doch keine andere Linie erzeugt.

Es bleibt noch übrig, die wichtigsten Eigenschaften der einfachen Kettenlinie hinzuzufügen, und zwar mit Rechnung und Beweis, was in den Acta nicht geschehen ist. Wir wollen die Figur anwenden, die in den Acta steht. Dort ist EBF die Seillinie, B der tiefste Punkt, BA die Achse, BG die

gleichseitige Hyperbel, die man die erzeugende nennen könnte, BH die Parabel, durch deren Rektifikation die Kettenlinie EBF konstruiert ist.

1. Zieht man die Tangente FD, so wird sein $AF : AD = BC : (BF$, der Kurve). Denn es ist

$$AF : AD = dy : dx.$$

Wir haben aber bei der Rechnung gefunden

$$dy : dx = a : s.$$

Also ist die Behauptung richtig.

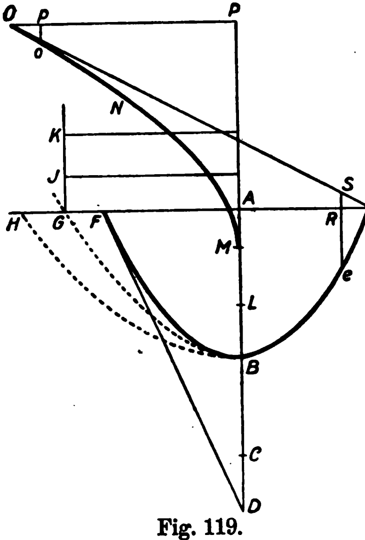


Fig. 119.

2. AE oder AF ist gleich der parabolischen Kurve BH, vermindert um die Strecke AG. Dies ist klar, weil bei der Konstruktion EG gleich BH genommen werde.

3. Die Kurve BE oder BF ist gleich der Strecke AG, d. h. die Stücke der Seilkurve bilden, wenn man sie als Ordinaten auf die Achse setzt, eine gleichseitige Hyperbel. Das ist eine bemerkenswerte Eigenschaft dieser Kurve. Wir haben dies bei der umgekehrten Tangentenmethode bewiesen. (Vgl. Seite 52.)

4. Die Seillinienfläche BAE oder BAF ist gleich dem Rechtecke aus BA und AF, vermindert um das Rechteck über CB und FG. Da nämlich

$$dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax + x^2}}$$

ist, so wird

$$xdy = \frac{axdx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{(ax + a^2)\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} - \frac{a^2dx}{\sqrt{2ax + x^2}}$$

$$= \frac{(ax + a^2)\,dx}{\sqrt{2ax + x^2}} - ady.$$

Also ist Integral xdy, d. h. das Komplement der Fläche BAF, gleich dem Integral des letzteren, also gleich

$$a\sqrt{2ax+x^2}-ay=CB\cdot AG-CB\cdot AF=CB\cdot FG,$$

mithin die Fläche BAF selbst

$$=BA\cdot AF-CB\cdot FG.$$

5. Die Kurve MNO, durch deren Abwicklung die Seillinie BE beschrieben wird, ist die dritte Proportionale zu CB und AG. Um die Richtigkeit hiervon zu finden, suche man zuerst die Abwickelnde EO, von der wir oben in dem Artikel über die Abwicklung der Kurven allgemein gezeigt haben, daß sie bei allen Kurven gleich

$$\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-d^2y\,dx}$$

ist (vgl. Seite 71). Bei der vorliegenden Kurve ist nun

$$dx^2+dy^2=ds^2=\frac{(a^2+2ax+x^2)\,dx^2}{2ax+x^2},$$

und da

$$dy=\frac{adx}{\sqrt{2ax+x^2}}$$

ist, so wird

$$d^2y=-\frac{(a^2+ax)\,dx^2}{(2ax+x^2)\sqrt{2ax+x^2}}$$

Man findet daher für den ganzen Ausdruck:

$$\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-d^2y\,dx}=EO=\frac{a^2+2ax+x^2}{a}$$

Zieht man hiervon das ab, was bei der Annahme $x=o$ herauskommt, so bleibt übrig

$$\frac{2ax+x^2}{a}=\text{der Kurve } MNO.$$

Es verhält sich also a oder CB zu $\sqrt{2ax+x^2}$ oder AG wie AG zu MNO.

6. Die abwickelnde Gerade EO ist die dritte Proportionale zu CB und CA. Denn wegen

$$EO = \frac{a^2 + 2ax + x^2}{a}$$

verhält sich a oder CB zu $a + x$ oder CA wie CA zu EO.

7. Die Gerade BM, bis zum Anfang der Kurve MNO genommen, ist gleich CB. Wenn nämlich $x = o$ ist, so wird die Abwickelnde EO, die jetzt BM ist, gleich $a = CB$.

8. MP ist das Doppelte von BA. Weil

$$MNO = \frac{2ax + x^2}{a}$$

ist, wird das Differential

$$Oo = \frac{(2a + 2x)\,dx}{a}.$$

Es ist aber das Dreieck Oop ähnlich dem Dreieck ESR und daher auch dem Dreieck eER, folglich $Ee : ER = Oo : po$, d. h.

$$\frac{adx + xdx}{\sqrt{2ax + x^2}} : \frac{adx}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{2adx + 2xdx}{a} : po,$$

also $2dx = po$ und, wenn man integriert, $2x = PM$.

9. Das Rechteck aus CB und PO ist das Doppelte der Hyperbelfläche ABG. Da nämlich $Ee : Oo = eR : pO$, d. h.

$$\frac{adx + xdx}{\sqrt{2ax + x^2}} : \frac{2adx + 2xdx}{a} = dx : pO,$$

also

$$pO = \frac{2dx \cdot \sqrt{2ax + x^2}}{a},$$

so ist

$$CB \cdot pO = 2dx\sqrt{2ax + x^2}$$

und, wenn man integriert,

$$CB \cdot PO = \text{der doppelten Hyperbelfläche } ABG.$$

10. Die Strecke CP wird im Punkte A halbiert. Da nämlich $MP = 2x$ ist, so wird $BP = 2x + a$, $BP - BA$ oder $AP = x + a = CA$ sein.

11. Die Kurve EB verhält sich zur Kurve MNO wie die Strecke CB zur Strecke AG. Denn es verhält sich EB, d. h. $\sqrt{2ax+x^2}$, zu MNO oder $\frac{2ax+x^2}{a}$ wie a zu $\sqrt{2ax+x^2}$, also wie CB zu AG.

12. Wenn man auf AG zwei Rechtecke AJ, AK aufsetzt, deren eins AJ dem aus der halben Transversalachse CB und der Strecke FG gebildet, das andere AK der Hyperbelfläche BGA gleich ist, und man trägt vom Scheitel B auf der Achse ein Stück BL ab, das gleich der Breitendifferenz KJ ist, so wird der Punkt L der Schwerpunkt der Seillinie EBF sein. Dies wird an einer andern Stelle bewiesen.

13. Wenn man sich über EF unendlich viele Kurven beschrieben denkt, die der Seillinie EBF gleich sind, und man streckt sie geradlinig aus und bringt in den einzelnen Punkten einer solchen Strecke Ordinaten an, die gleich den betreffenden Abständen von der Geraden EF sind, so wird von allen Flächen, die auf diese Weise zustande kommen, diejenige die größte sein, die bei der Seillinie entsteht.

Dies wird mit Hilfe jenes Axioms bewiesen, daß der Schwerpunkt so weit herabsinkt, als er herabsinken kann.

Anmerkungen.

Johann Bernoulli (1667—1748) ist einer der genialsten Mathematiker der *Leibniz*schen Schule. Ihm und seinem Bruder *Jakob* ist es hauptsächlich zu danken, daß der *Leibniz*sche Kalkül sich so schnell einbürgerte.

Die hier zum ersten Male in einer Auswahl deutsch herausgegebenen »Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque conscriptae in usum ill. Marchionis Hospitalii« (Opera omnia, t. III, p. 386—558) stammen, wie im Titel ausdrücklich hervorgehoben wird, aus dem Pariser Aufenthalt *Johann Bernoullis* (1691—1692). Eine Handschrift davon befindet sich in der Bibliothek zu Basel. Dagegen scheint die Differentialrechnung, von der *Bernoulli* in der Anmerkung auf Seite 3 spricht, die also 1742 noch existierte, verloren gegangen zu sein. Sie war ebenfalls für den Marquis *de l'Hospital* (1661 bis 1704) niedergeschrieben. Es ist sehr zu bedauern, daß nicht einmal eine Abschrift davon sich erhalten hat. Wir wissen, daß es in Paris mehrere solche Abschriften gab. Man würde daraus sichere Aufschlüsse über die Abhängigkeit *de l'Hospitals* von *Bernoulli* gewinnen können, während man jetzt nichts Definitives hierüber zu sagen vermag.

Nach *Johann Bernoullis* Darstellung war er es, der den Marquis zuerst in die *Leibniz*sche Infinitesimalrechnung einführte. Er überließ ihm Manuskripte, die *de l'Hospital* ohne *Bernoullis* Erlaubnis für sein berühmtes Buch: »Analyse des infiniment petits,« (1696) verwertete.

Ein ganz anderes Bild von *de l'Hospitals* mathematischem Bildungsgang erhalten wir aus dessen Briefen an *Leibniz*. Es scheint danach, daß der Marquis die *Leibniz*sche Abhandlung vom Jahre 1684, über die sich die beiden *Bernoulli* so sehr die Köpfe zerbrechen mußten, ohne fremde Hilfe verstehen konnte und schon über recht gute Kenntnisse verfügte, als *Johann Bernoulli* in Paris eintraf.

Wem soll man nun mehr glauben, *Bernoulli* oder *de l'Hospital*? *Moritz Cantor* entscheidet sich zugunsten des Marquis, wenn auch mit einigen Einschränkungen (Vgl. seine Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Band III, Seite 216). Er beruft sich auf *Bernoulli*s bekannte Ruhmredigkeit und die Tatsache, daß dieser auch sonst gelegentlich die Unwahrheit gesagt hat.

In *Bernoulli*s Streit mit *Taylor* ist auch die *l'Hospital*-Frage eingehend erörtert worden, und in der Abwehrschrift »*M. Johannis Burcardi*, Basiliensis, Epistola ad virum clarissimum Brook Taylor« (Acta Eruditorum, 1721; *Johann Bernoulli*, Opera omnia, t. II, p. 483) finden sich darüber sehr interessante Angaben. Sind auch diese unwahr, so ist über *Bernoulli*s Charakter kein Wort mehr zu verlieren. Denn offenbar steht er hinter dieser Streitschrift.

Es wird dort mit Zitaten aus Briefen operiert, die der bekannte Mathematiker *Pierre Rémond de Montmort* an *Joh. Bernoulli* gerichtet hat. Aus ihnen geht hervor, daß tatsächlich eine Handschrift der *Bernoulli*schen Differentialrechnung in *de l'Hospital*s Besitz war. Am 28. Okt. 1718 schreibt *Montmort*:

»C'est d'un ami, qui était à Paris avec vous et qui copiait vos leçons pour Mr. *de l'Hospital*, que le Père *Reyneau* a tiré son Manuscript, dont j'ai bien remarqué quelques petits lambeaux dans son livre *Analyse démontrée*: Le Père *Bizance* en avait aussi un. Comme je pressais Mr. le M. *de l'Hospital* de me le prêter, il me donna une lettre pour le Père *Bizance*, par laquelle il le priait de me prêter le sien; mais apparemment le mot était donné pour n'en rien faire, car je ne l'eus point; le P. *Reyneau* me prêta le sien environ un an après«.

Es wird in der Streitschrift darauf hingewiesen, daß die hier genannten Männer noch am Leben seien (*l'Hospital* war es allerdings nicht mehr), und *Taylor* sie also fragen könne. »Veritati non renuent testimonium« (Sie werden der Wahrheit ihr Zeugnis nicht verweigern). So könnte man doch nicht sprechen, wenn die Sache nicht ihre Richtigkeit hätte.

Aus den Briefen *de l'Hospital*s an *Bernoulli* hebt dessen Verteidiger zahlreiche Stellen hervor, die deutlich zeigen, wie sehr der Marquis seinen Lehrer auch nach dessen Abreise noch in Anspruch nahm. Er muß ihm eine Aufgabe nach der andern lösen, und jedesmal läßt sich die Stelle in der »Analyse des infiniment petits« nachweisen, wo die *Bernoulli*sche Lösung verwertet ist. Auch während der Abfassung dieses Buches hat

also der Marquis fortgesetzt fremde Hilfe in Anspruch genommen.

Der einzige Vorwurf, den man *Joh. Bernoulli* machen kann, ist der, daß er sich zuerst ohne jeden Widerspruch ausnutzen ließ und dann später, seinem Edelmut entsagend, gegen den verstorbenen Freund häßliche Angriffe richtete. Er brach damit einen Vertrag, den er stillschweigend mit dem Marquis geschlossen hatte, dahin lautend, daß dieser *Bernoullis* Mitteilungen für sich verwerten durfte wie sein geistiges Eigentum.

Die Integralrechnung *Bernoullis* steht, wenn man nur darauf achtet, welche Funktionen integriert werden, auf sehr tiefer Stufe. Sie war schon 1742 etwas veraltet, als *Bernoulli* sie in seine gesammelten Werke aufnahm. Damals hätte er nicht mehr gesagt, daß $\int \frac{dx}{x}$ unendlich ist (vgl. oben Seite 4). Offenbar hat er die Vorlesungen unverändert zum Abdruck gebracht. Faßt man aber die Integralrechnung in einem weiteren Sinne und rechnet dazu auch die Integration der Differentialgleichungen und die geometrischen Anwendungen, so bieten die *Bernoulli*schen Vorlesungen über Integralrechnung sehr viel Interessantes und erscheinen auch heute noch lesenswert.

---

1) *Zu S. 3.* Diese Fußnote rührt von *Johann Bernoulli* selbst her. Außer *de l'Hospitals* »Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes« (1797), die man als »die erste Differentialrechnung« in Lehrbuchform bezeichnen kann, fußt auch die »Analyse démontrée« des *Père Reyneau*, die oben erwähnt wurde, auf *Bernoullis* Manuskript. Dieses letztere Werk scheint übrigens verloren gegangen zu sein.

Man weiß, daß auch *Newton*sche Manuskripte von Hand zu Hand gingen und verschiedentlich exzerpiert wurden. Das war offenbar in damaliger Zeit nichts Seltenes. Übrigens hat sich *Bernoulli* (wie *Cantor* erzählt) schon 1898 brieflich bei *Leibniz* beschwert, daß *de l'Hospital* sein Manuskript in unerlaubter Weise ausgenutzt hätte. Er trat aber mit dieser Beschwerde erst nach des Marquis Tode vor die Öffentlichkeit.

2) *Zu S. 4.* Daß

1) $$\int \frac{dx}{x} = \log x + \text{Konst.}$$

---

ist, kann man schon aus *Leibniz'* Abhandlung vom Jahre 1684 entnehmen. Dort kommt *Leibniz* bei Besprechung der *de Beaune*schen Aufgabe zu der Differentialgleichung

$$\frac{w}{a} = \frac{dw}{dx}$$

und löst sie ganz richtig durch die logarithmische Kurve. Dies scheint aber unbeachtet geblieben zu sein. Daß die Integration von $\frac{dx}{x}$, d. h. die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel durch Logarithmen möglich ist, war übrigens seit *Gregorius* von St. Vincent (1647) und *Nikolaus Mercator* (1668) bekannt. Es fehlte eigentlich nichts weiter als ein handliches Symbol für den Logarithmus.

Will man das Integral $\int \frac{dx}{x}$ aus der Formel

$$2) \qquad \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + \text{Konst.}$$

gewinnen, und das ist es, worauf *Bernoulli* abzielt, so setze man $p = -1 + \varepsilon$ und schreibe die Formel in folgender Weise

$$2^*) \qquad \int \frac{dx}{x^{1-\varepsilon}} = \frac{x^\varepsilon - 1}{\varepsilon} + \text{Konst.}$$

Dann ergibt sich im Falle $\lim \varepsilon = 0$ rechts nicht ∞ (wie bei *Bernoulli*), sondern $\log x + C$. *Euler* hat in seinen »Institutiones calculi differentialis« das Resultat durch Differentiation verifiziert. Er schreibt in der naiven Auffassung der damaligen Zeit

$$d \log x = d\frac{x^0 - 1}{0} = \frac{0 \cdot x^{0-1} dx}{0} = x^{0-1} dx = \frac{dx}{x}.$$

Daß es *Bernoulli* hier nicht gelingt, die Brücke zwischen den Formeln 1) und 2) zu finden, beruht hauptsächlich darauf, daß er sich nicht um die Integrationskonstante kümmert, was er übrigens in seinen Vorlesungen durchweg tut (mit ganz wenigen Ausnahmen). Sonst wäre er auf die Schreibweise 2*) der Formel 2) gekommen. Daß $\frac{x^0 - 1}{0} = \log x$ ist, wenn wir uns dieser unexakten Schreibweise bedienen wollen, konnte er nach seines Bruders Idee der kontinuierlichen Verzinsung

(Mai 1690) schon herausfinden, wenn er es noch nicht wußte. Vgl. auch Anmerkung 20.

3) *Zu S. 5. Bernoulli* hätte so schließen können: Setzt man

$$y = \sqrt{2ax + x^2},$$

so ist $y^2 = 2ax + x^2$, also

$$ydy = adx + xdx,$$

mithin

$$\frac{dy}{a+x} = \frac{dx}{y} = \frac{dx+dy}{a+x+y},$$

und

$$\int \frac{dx}{y} = \log(a + x + y) + \text{Konst.}$$

Aber er steht ja noch auf dem Standpunkt, $\int \frac{dx}{x} = \infty$ ist.

4) *Zu S. 7.* Die umgekehrte Tangentenmethode (methodus tangentium inversa) besteht in der Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung $f(x, y, y') = 0$. Jede solche Gleichung drückt eine Eigenschaft der Kurventangente aus, und man soll daraus die Kurve finden. Bei der Tangentenmethode ist die Kurve gegeben, und die Tangente gesucht. — Beispiele zur umgekehrten Tangentenmethode finden sich schon bei den Vorläufern von *Leibniz* und *Newton*. *Leibniz* wußte schon 1675 solche Aufgaben zu lösen.

5) *Zu S. 7. Ehrenfried Walther von Tschirnhaus* auf Kießlingswalde (1651—1708) stammte aus einem böhmischen oder mährischen Adelsgeschlecht, das sich in der Lausitz angesiedelt hatte. Er studierte in Leiden und machte dann große Reisen. 1675 traf er in Paris mit *Leibniz* zusammen. Es kam zu einem lebhaften wissenschaftlichen Verkehr zwischen ihnen, der in Briefen fortgesetzt wurde.

Am bekanntesten ist *von Tschirnhaus* die sogenannte *Tschirnhausen*transformation. Genügt x einer algebraischen Gleichung n-ten Grades, so ergibt sich auch für

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$$

eine Gleichung n-ten Grades. Man sagt von dieser, daß sie aus jener durch eine *Tschirnhausen*transformation entstanden ist. Da man hier n Konstanten zur Verfügung hat, so kann man versuchen, die Gleichung für y auf die Form $y^n - c = 0$

zu bringen. Dies war *Tschirnhaus*ens eigentliches Ziel (vgl. seine Arbeit »Methodus auferendi omnes terminos intermedios ax data aequatione« in den Acta Eruditorum von 1683). Mit Recht hielt ihm schon *Leibniz* entgegen, daß seine Methode bei der Gleichung 5. Grades versagt. Trotzdem hörte *Tschirnhaus* nicht auf, mit seiner Auflösung aller algebraischen Gleichungen zu prahlen, wie er denn überhaupt mehr aus Ehrgeiz als aus wahrem Interesse sich mit Mathematik beschäftigte.

Was *Tschirnhaus*ens Kaustiken (Brennlinien) anbetrifft, so ist es nicht sicher, ob er auf diese Idee selbständig gekommen ist. Man kann vielmehr mit *Moritz Cantor* vermuten, daß er sie *Huygens* verdankt. In einem Briefe vom 7/4. 1681 legte *Tschirnhaus* seine Idee *Leibniz* vor, und im November 1682 publizierte er sie in den Acta Eruditorum (Inventa nova exhibita Parisiis Societati regiae Scientiarum). *Johann Bernoulli* hat die Lehre von den Kaustiken weiter entwickelt und zu einem gewissen Abschluß gebracht. (vgl. Anmerkung 67.)

Die Rektifikation mit Hilfe der Abwicklung geht auf *Huygens* zurück und steht im 3. Teil des Horologium oscillatorium (1673). Vgl. die deutsche Ausgabe dieses interessanten Werkes von *A. Heckscher* und *A. von Oettingen* (*Ostwalds* Klassiker, Nr. 192).

6) *Zu S. 8.* Die Quadratur des Kreises und der Hyperbel ist dasselbe wie die Berechnung der Integrale

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx, \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx.$$

Diese lassen sich durch partielle Integration auf

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} + C$$

und

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C$$

zurückführen.

Was *Bernoulli* hier meint, ist der Satz, daß sich jedes Integral von der Form

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c})\, dx,$$

wo R eine rationale Funktion bedeutet, durch arc sin, log und algebraische Funktionen ausdrücken läßt.

7) *Zu S. 10.* *Diophantos* lebte um 340 n. Chr. in Alexandria. Sein Hauptwerk sind die »Arithmeticorum libri VI.« Man verdankt ihm u. a. Methoden zur Beseitigung von Irrationalitäten.

8) *Zu S. 11.* Im Jahre 1702 hat *Leibniz* die Integration rationaler Funktionen (mittels der Partialbruchzerlegung) gelehrt. Vgl. *Ostwalds* Klassiker Nr. 162. Man sieht hier deutlich, daß *Bernoulli* sein Manuskript von 1691 unverändert zum Abdruck gebracht hat. Denn im Jahre 1742, wo die Opera omnia erschienen, konnte er solche Integrationen schon ausführen.

Es ist, wenn man $a = c^3$ setzt,

$$\frac{3y^4dy}{y^3 - c^3} = 3y + \frac{3c^3ydy}{y^3 - c^3} = 3y + \frac{c^2}{y - c} - \frac{c^2y - c^3}{y^2 + cy + c^2},$$

also

$$\int \frac{3y^4dy}{y^3 - c^3} = \frac{3}{2}y^2 + c^2 \log (y - c) - \frac{c^2}{2} \log (y^2 + cy + c^2)$$
$$+ c^2 \sqrt{3} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{2y + c}{c\sqrt{3}}.$$

Das Integral läßt sich, wenn man die damalige Ausdrucksweise benutzen will, auf die Quadratur des Kreises und der Hyperbel reduzieren.

9) *Zu S. 14.* Es fehlten eben die Funktionen arc sin und log. Einige Jahre nach 1691 würde *Bernoulli* anders gesprochen haben. Da war er, besonders durch den Briefwechsel mit *Leibniz*, weit über den Standpunkt von 1691 hinausgekommen. 1696 nahm er im Einverständnis mit *Leibniz* auch das Symbol $\int$ zur Bezeichnung von Integralen an.

10) *Zu S. 20.* Es ist in der Tat

$$\int_x^\infty \frac{a^3dx}{x^2} = -\left(\frac{a^3}{x}\right)_x^\infty = \frac{a^3}{x},$$

also $\frac{a^3}{x}$ die Restfläche $GFCE$.

11) *Zu S. 22.* Die Figur (aus *Bernoulli* übernommen) ist eigentlich in zwei zu zerlegen. NO hat nichts mit NM zu tun. Der Leser möge eine korrekte Figur für $z = a^3 : (a^2 + m^2)$ zeichnen.

12) *Zu S. 27.* Die hier behandelte Kurve ist das cartesische Blatt (Folium Cartesii). Da in den Anfängen der analytischen Geometrie die Koordinaten keine Vorzeichen hatten, konnte man sich zuerst keine richtige Vorstellung von der Gestalt dieser Kurve machen. Auch *Descartes*, der von ihr 1638 in einem Briefe an *Mersenne* redet, hat ein ganz falsches Bild von ihr gehabt. (vgl. *Loria*, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven etc. I, p. 54). *Huygens* scheint der erste gewesen zu sein, der die Kurve richtig zeichnen lehrte (1692). Die Figur 17 wird *Bernoulli* wohl 1691 noch nicht gehabt haben. Auffallend ist es, daß er nichts darüber sagt, woher er die Kurve kennt.

13) *Zu S. 28.* *Tschirnhausens* Arbeit steht in den Acta Eruditorum, September 1687, p. 526. Die ganze fünfte und sechste Vorlesung *Bernoullis* beschäftigt sich mit der Auffindung von Kurven mit nur einem quadrierbaren Flächenraum. Wir haben diese Betrachtungen hier ausgelassen und aus der siebenten Vorlesung nur den auf die Integrationskonstante bezüglichen Teil beibehalten. Hier spricht sich *Bernoulli* vollkommen klar über die Vervollständigung der Integrale aus. Wenn er diese richtige Auffassung nur konsequent durchgeführt hätte!

14) *Zu S. 30.* Die Lösung der Aufgabe ist unvollständig, weil die Integrationskonstante fehlt. Dasselbe gilt von den späteren Aufgaben.

15) *Zu S. 32.* *Bernoulli* unterscheidet zwei kubische Parabeln:

$$y^3 = cx^2 \quad \text{(kubische Parabel 1. Art)},$$
$$y^3 = cx^2 \quad \text{(kubische Parabel 2. Art)}.$$

Die kubische Parabel zweiter Art nennt man jetzt gewöhnlich die semikubische oder *Neil*sche Parabel, die von erster Art kurz die kubische Parabel. Beide Kurven werden noch an verschiedenen Stellen in diesen Vorlesungen auftreten.

16) *Zu S. 32.* Geometrische Kurven sind das, was man jetzt algebraische Kurven nennt. Mechanische Kurven nennt *Bernoulli* alle nichtgeometrischen (nichtalgebraischen, d. h. transzendenten) Kurven.

17) *Zu S. 34.* Weil ihm die Funktion Logarithmus fehlt, muß *Bernoulli* die Differentialgleichung

$$1) \qquad \frac{dx}{x} = a\frac{dy}{y}$$

zuerst in

$$\frac{(axdy - ydx)y^{a-1}}{x^2} = d\left(\frac{y^a}{x}\right) = 0$$

verwandeln, um sie integrieren zu können. Mit Hilfe des Logarithmus hätte er aus 1) sofort schließen können

$$\log x = \log(y^a) - \log C,$$

also

$$\frac{y^a}{x} = C.$$

18) *Zu S. 39.* Wieder müssen umständliche Betrachtungen angestellt werden, weil die Funktion Logarithmus fehlt.

19) *Zu S. 40.* Es ist in der Tat

$$\text{Fläche } KG = \int_{y_1}^{y_2} \frac{2a^2dy}{y} = a^2 \log \frac{y_2^2}{y_1^2},$$

$$\text{Fläche } MB = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a^2dx}{x} = a^2 \log \frac{x_2}{x_1}.$$

Beide Flächen sind also gleich, wenn

$$\frac{y_2^2}{y_1^2} = \frac{x_2}{x_1}$$

ist. Ähnliches gilt, wenn $DB = nAB$ ist.

20) *Zu S. 41.* Hier integriert *Bernoulli* den Ausdruck $\int \frac{dy}{y}$. Er sagt auch, daß die Bildkurve dieses Integrals eine logarithmische Kurve ist. Aber er bemerkt nicht, daß dieses Ergebnis im Widerspruch mit seiner sonstigen Behauptung

$$\int \frac{dy}{y} = \infty$$

steht, die er z. B. noch auf Seite 39 aufstellt.

21) *Zu S. 42.* Es handelt sich hier um Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Setzt man hier $y = zx$, $dy = zdx + xdz$, so ergibt sich

$$z + x\frac{dz}{dx} = f(z) \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}.$$

Die Variablen sind also separiert. *Bernoulli* zeigt hier das noch jetzt übliche Verfahren zur Integration der sogenannten homogenen Differentialgleichung erster Ordnung.

22) *Zu S. 42.* Eine solche Differentialgleichung hat die Form

$$1) \quad (a_1 x + b_1 y + c_1)\, dx + (a_2 x + b_2 y + c_2)\, dy = 0,$$

wo die a, b, c Konstanten sind. Setzt man nach *Bernoulli*s Vorschrift

$$x = \xi + \lambda, \; y = \eta + \mu,$$

so ergibt sich die homogene Gleichung

$$(a_1 \xi + b_1 \eta) d\xi + (a_2 \xi + b_2 \eta) d\eta = 0,$$

wofern man die Konstanten λ, μ durch die Gleichungen

$$a_1 \lambda + b_1 \mu + c_1 = 0, \; a_2 \lambda + b_2 \mu + c_2 = 0.$$

bestimmt. Im Falle

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

kann man 1) auf die Form

$$(a_1 x + c_1)\, dx + (a_2 x + c_2)\, dy = 0$$

bringen. Sind a_2, c_2 nicht beide gleich Null, so lassen sich die Variablen sofort trennen. Ist $a_2 = c_2 = 0$, so ist die linke Seite der Gleichung ein vollständiges Differential und läßt sich ohne weiteres integrieren.

23) *Zu S. 44. Bernoulli* will nur hervorheben, daß unter den gefundenen Kurven auch das Folium Cartesii zu finden ist (vgl. Anm. 12).

24) *Zu S. 50.* Man kann mit Hilfe der Abkürzungen

$$C = \frac{1}{ab - b}, \; p = -\frac{a - 2}{a - 1}$$

schreiben

$$dx = Cm^p \,(b^2 - a^2 m^2)^{\frac{1}{2}} dm$$

oder, wenn man noch die Substitution $m^2 = n$ macht,

$$dx = C_1 n^{\frac{p-1}{2}} (b^2 - a^2 n)^{\frac{1}{2}} dn.$$

dx läßt sich in ein rationales Differential verwandeln, wenn eine der Zahlen

$$\frac{p-1}{2},\ \frac{p}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{2a-3}{2a-2},\ \frac{a-2}{2a-2}$$

ganz ist. Im ersten Falle führt die Substitution

$$b^2 - a^2 n = t^2 \quad \text{zu} \quad dx = C_3 (b^2 - t^2)^{\frac{p-1}{2}} t^2 dt, \qquad \left(\frac{p-1}{2} \text{ ganz}\right)$$

im zweiten Falle die Substitution

$$\frac{b^2}{n} - a^2 = t^2 \quad \text{zu} \quad dx = C_3 (a^2 + t^2)^{-\frac{p}{2}-2} t^2 dt. \qquad \left(\frac{p}{2} \text{ ganz}\right)$$

Ist z. B. $\frac{p-1}{2} = k$ oder $-\frac{p}{2} - 2 = k$ und k eine der Zahlen 0, 1, 2, . . ., so ergibt sich sicher eine algebraische Kurve. Dies tritt also ein, wenn

$$a = \frac{2k+3}{2k+2} \quad \text{oder} \quad a = \frac{2k+2}{2k+3}$$

ist. Der Annahme $k = 0$ entspricht der von *Bernoulli* behandelte Fall $a = \frac{3}{2}$.

Ein Integral von der Form

$$I_q = \int \frac{dt}{(A + Bt^2)^q} \quad (q \text{ ganz und positiv})$$

läßt sich mittelst der partiellen Integration auf

$$I_1 = \int \frac{dt}{A + Bt^2}$$

reduzieren. Es ist nämlich (im Falle $q > 1$)

$$I_q = \frac{2q-3}{A(2q-2)} I_{q-1} + \frac{1}{A(2q-2)} \frac{t}{(A+Bt^2)^{q-1}}.$$

Man ersieht hieraus, daß

$$I_q = \frac{(2q-3)(2q-5)\ldots 1}{(2q-2)(2q-4)\ldots 2} \frac{I_1}{A^{q-1}} + \ldots \qquad (q = 2, 3, \ldots)$$

sein wird. Die Punkte bedeuten rationale Glieder.

Nun hat man aber (für $q > 1$)

$$\int \frac{t^2 dt}{(A+Bt^2)^q} = \frac{1}{B}(I_{q-1} - AI_q) = \frac{1}{B(2q-2)} I_{q-1} + \cdots$$

und im Falle $q = 1$

$$\int \frac{t^2 dt}{A+Bt^2} = \frac{1}{B}(t - AI_1).$$

Die Integrale

$$\int \frac{t^2 dt}{(A+Bt^2)^q} \qquad (q = 1, 2, 3, \ldots)$$

sind also sicher nicht algebraisch.

Somit sind die Fälle $a = \frac{2k+3}{2k+2}$, $a = \frac{2k+2}{2k+3}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ die einzigen, wo eine algebraische Kurve herauskommt.

25) *Zu S. 51.* Es wird hier y als unabhängige Veränderliche gedacht (statt x). Demgemäß ist $d^2y = 0$. Dieses Hilfsmittel des Wechsels der unabhängigen Veränderlichen findet man schon in *Leibniz* Manuskripten von 1675.

Bernoulli kann die Rechnung nicht zu Ende führen, weil ihm die Funktion Logarithmus fehlt. Aus

$$dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

folgt

$$y = a \log (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + \text{Konst.}$$

oder, wenn man das Achsensystem in der y-Richtung passend verschiebt,

*) $$y = a \log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

Hieraus folgt

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right).$$

Die Kurve ist also die Kettenlinie, die *Bernoulli* in einer späteren Vorlesung behandelt.

26) *Zu S. 53.* Es ist auf der gleichseitigen Hyperbel

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 - y^2} = \frac{dx + dy}{x + y},$$

also

$$\frac{1}{2}(xdy - ydx) = \frac{a^2}{2} d \log (x + y)$$

und der Hyperbelsektor

$$ABC = \frac{a^2}{2} \log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Vergleicht man dies mit Formel *) in Anmerkung 25, so erkennt man die Richtigkeit der *Bernoulli*schen Behauptung.

Auf Seite 52, Zeile 3, muß A durch B ersetzt werden.

27) *Zu S. 54.* Hier ist also s die unabhängige Veränderliche.

28) *Zu S. 55.* Die rechte Seite ist in der Tat das Differential von

$$\frac{1}{ds} \frac{a\sqrt{ds^2 - dy^2}}{dy},$$

aber nur rein formal; denn dieser Ausdruck ist bedeutungslos.

29) *Zu S. 56.* Hier ist wieder x die unabhängige Veränderliche. — Die Integration läßt sich so zu Ende führen: Setzt man $z = \sqrt{x^2 - 4a^2}$, so ist $zdz = xdx$ und

$$\frac{xdz - zdx}{4a^2} = \frac{dx + dz}{x + z},$$

mithin

$$zdx = \tfrac{1}{2} d(zx) - \tfrac{1}{2}(xdz - zdx) = \tfrac{1}{2} d(zx) - 2a^2 d \log (x + z),$$

$$\int zdx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 4a^2} - 2a^2 \log \frac{x + \sqrt{x^2 - 4a^2}}{2a} + \text{Konst.}$$

30) *Zu S. 58.* Durch die Wahl der unabhängigen Veränderlichen y wird die Differentialgleichung vereinfacht.

31) *Zu S. 58.* Wieder muß *Bernoulli* die Integralkurve konstruieren, weil ihm zu ihrer analytischen Bestimmung die Funktion arc sin fehlt. Fig. 40 ist übrigens etwas zu klein. Es soll eigentlich AL doppelt so lang sein wie AD in Fig. 39.

32) *Zu S. 59.* *Bernoulli* gibt hier eine Einteilung der transzendenten Kurven nach den Quadraturen, von denen die Aufstellung ihrer Gleichungen abhängt.

33) *Zu S. 60.* Es wird verlangt

$$\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = n, \quad x + \frac{ydy}{dx} = m + \text{Konst.}$$

Hieraus ergibt sich

$$ndn = \left\{dx + d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)\right\}\frac{y\,dy}{dx}, \quad \text{also} \quad \frac{ndn}{dm} = \frac{y\,dy}{dx}.$$

Beide Kurven haben also gleiche Subnormalen (in entsprechenden Punkten).

34) *Zu S. 62.* Man kann auch so rechnen:

$$m^2 + n^2 = a^2, \quad \text{also } mdm + ndn = 0,$$

mithin

$$x = m - \frac{ndn}{dm} = 2m,$$

$$y = \sqrt{n^2 - \frac{n^2 dn^2}{dm^2}} = \sqrt{n^2 - m^2} = \sqrt{a^2 - 2m^2}$$

und daher

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = a^2.$$

Das ist eine Ellipse mit den Halbachsen $a\sqrt{2}$, a.

35) *Zu S. 62.* Es handelt sich einfach darum, aus den Gleichungen

$$m^4 - xm^3 + a^4 = 0,$$

$$m^6 y^2 - a^4 m^4 + a^8 = 0$$

das m zu eliminieren. *Bernoulli* führt diese Elimination auf recht umständliche Weise aus.

36) *Zu S. 64.* Vom oskulierenden Kreise spricht *Leibniz* in seiner Arbeit: »Meditatio nova de natura anguli contactus etc.« in den Acta Eruditorum von 1686. Er sagt nicht, wie *Bernoulli* hier angibt, daß die Punkte *B* und *C* sich küssen, sondern es küssen sich vielmehr Kreis und Kurve. *Leibniz* befand sich übrigens im Irrtum über die Art der Berührung zwischen Kurve und Oskulationskreis. Er glaubte nämlich, daß sie vier konsekutive Punkte haben, während es faktisch nur drei sind. *Jakob Bernoulli* hat im März 1692, ebenfalls in den Acta Eruditorum, *Leibniz'* Ansicht korrigiert. *Johann Bernoulli* gibt auf Seite 67 die richtige Auffassung.

37) *Zu S. 64.* *Huygens* hat im dritten Teil seines »Horologium oscillatorium« (*Ostwalds* Klass. Heft 193) (1673) be-

wiesen, daß die Evolute der Ort der Schnittpunkte konsekutiver Normalen ist. Das hat *Bernoulli* hier wohl im Sinne.

38) *Zu S. 65.* Mit diesem Beweise ist *Bernoulli* selbst nicht zufrieden und gibt deshalb weiter unten einen andern.

39) *Zu S. 66.* Daß der Oskulationskreis die Kurve durchsetzt, beruht darauf, daß er drei konsekutive Schnittpunkte mit ihr hat. Beim Passieren eines einfachen Schnittpunktes geht er von einer auf die andere Seite. Tut er dies dreimal, so kommt er von einer Seite auf die andere.

40) *Zu S. 67.* *Bernoulli* denkt an algebraische Kurven.

41) *Zu S. 67.* *Descartes* hat in seiner Géométrie (1637) die Koordinatenmethode entwickelt, die freilich vor ihm schon andere kannten (z. B. *Vieta*).

42) *Zu S. 68.* Es steht hier die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt (s, $-t$) und dem Radius u. Charakteristisch ist das Ignorieren der Vorzeichen der Koordinaten. Auch bei *Descartes* waren die Koordinaten nur Längen. Daher das Ablesen der Formeln aus einer speziellen Figur.

43) *Zu S. 74.* Daß die Evolute der Parabel eine semikubische (oder *Neil*sche) Parabel ist, hat *Huygens* entdeckt (Horologium oscillatorium, 1873, III. Teil, Satz 8). Er hat auch die Rektifikation der Kurven durch Abwicklung gelehrt.

44) *Zu S. 75.* Es ist

$$dx^2 + dy^2 = \frac{[a^3 + 4a(a+b)x + 4(a+b)x^2]dx^2}{4abx + 4bx^2},$$

$$\frac{dx^2 + dy^2}{-d^2y} = \frac{1}{a^3b}[a^3 + 4a(a+b)x + 4(a+b)x^2]\sqrt{a^2bx + abx^2},$$

also

$$BD = \frac{1}{2a^2b\sqrt{a}}[a^3 + 4a(a+b)x + 4(a+b)x^2]^{\frac{3}{2}}.$$

Auf Seite 74 (ganz unten) muß die Klammer hinter der 4 stehen.

45) *Zu S. 76.* Manchmal kommt im Wege der Rechnung doch eine Größe mit Vorzeichen heraus. Dann findet *Bernoulli* natürlich die richtige Deutung dafür. Dies kann man an verschiedenen Stellen der Vorlesungen beobachten.

46) *Zu S. 78.* Es ist.

$$\text{Bogen } s = \int_0^x \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx = \sqrt{1 + y_1'^2} \cdot x$$

Wo y_1' einen Wert von y' im Intervall $(0, x)$ bedeutet. Läßt man x nach Null konvergieren, und ist dabei $\lim y' = 0$, so ergibt sich.

$$\lim \frac{s}{x} = 1.$$

Man könnte sich auch darauf berufen, daß das Verhältnis des Bogens zur Sehne dem Grenzwert 1 zustrebt, wenn der Bogen sich unendlich verkleinert.

47) *Zu S. 79.* Man kann bei der Berechnung der Krümmung die Kurve in der Umgebung des betrachteten Punktes mit dem Oskulationskreise identifizieren. Dann sieht man sofort, daß $\lim \frac{y^2}{2x} = BD$ ist.

48) *Zu S. 80.* Die Gleichung des oskulierenden Kreises in bezug auf das Achsensystem Normale — Tangente lautet, wenn ϱ der Krümmungsradius ist,

$$y = \sqrt{x(2\varrho - x)}$$

Hieraus entnimmt man

$$\frac{y^2}{2x} = \varrho - x, \text{ also } \lim \frac{y^2}{2x} = \varrho,$$

und man kann nun x, y als Punkt der Kurve betrachten (vgl. Anm. 47).

Es ist leicht, hieraus die Differentialformel für ϱ abzuleiten.

49) *Zu S. 80.* Gemeint ist natürlich die Rektifizierbarkeit durch algebraische Funktionen.

50) *Zu S. 84.* Man kann die Richtigkeit der Formel bestätigen, indem man die Parallelkurven der Parabel

$$t = \tfrac{4}{9} \sqrt{ay}, \quad r = \tfrac{1}{3} y$$

aufsucht. Die Richtungskosinus der Normale sind

$$\sqrt{\frac{9y}{9y + 4a}}, \quad -\sqrt{\frac{4a}{9y + 4a}}$$

Trägt man auf allen Normalen die konstante Strecke k auf, so ergibt sich die Parallelkurve

$$t = \tfrac{4}{9}\sqrt{ay} + k\sqrt{\frac{9y}{9y+4a}},$$

$$r = \tfrac{1}{3}y - k\sqrt{\frac{4a}{9y+4a}}.$$

Diese Formeln gehen in die *Bernoulli*schen über, wenn man setzt

$$k = b - \tfrac{8}{27}a$$

und eine Translation der Achsen vornimmt.

51) *Zu S. 84.* Wir wissen bereits, daß unter den Evolventen der semikubischen Parabel die Parabel vorkommen muß. Vgl. Seite 74.

52) *Zu S. 87.* Setzt man

$$\tfrac{1}{4}ay + \tfrac{1}{9}a^2 = z^2,$$

so wird

$$y = \frac{4z^2}{a} - \frac{4}{9}a,\quad dy = \frac{8z\,dz}{a},$$

also

$$\frac{3y\,dy}{8\sqrt{\frac{1}{4}ay + \frac{1}{9}a^2}} = \frac{4}{a^2}\cdot 3z^2dz - \frac{4}{3}dz.$$

53) *Zu S. 91.* Die *Bernoulli*sche Herleitung der Kurvengleichung ist sehr umständlich. *Leibniz* hat 1692 in den Acta Eruditorum eine inhaltreiche Abhandlung veröffentlicht: »De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente«, worin er das bekannte Verfahren zur Enveloppenbildung auseinandersetzte, das noch jetzt angewandt wird.

Die hier sich ergebende Enveloppe nennt man nach *Littrow* Astroide. Sie ist, wie *Bernoulli* findet, eine Kurve 6. Ordnung. Aus seinen Formeln läßt sich auch entnehmen, daß sie eine rationale Kurve ist. Macht man in seinen Gleichungen

$$t = \frac{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2},\quad r = \frac{x^3}{a^2}$$

die Substitution $x = a\sin\varphi$, so findet man

$$*)\qquad t = a\cos^3\varphi,\quad r = a\sin^3\varphi.$$

cos φ, sin φ lassen sich aber rational durch $tg\,\frac{\varphi}{2}$ ausdrücken.

54) *Zu S. 92.* Sehr einfach geht die Rektifikation, wenn man sich der Parameterdarstellung *) bedient (vgl. Anm. 53).

55) *Zu S. 94.* Vgl. Horologium oscillatorium (1673), Teil III, Satz 6. *Huygens* benutzte diese Eigenschaft, um isochrone Pendelschwingungen zu erzeugen. Praktisch bietet das Zykloidenpendel jedoch verschiedene Nachteile.

56) *Zu S. 94.* *Tschirnhausens* Kaustik ist die Brennlinie des Kreises gegenüber Parallelstrahlen. Sie wird weiter unten von *Bernoulli* ausführlich untersucht. Vgl. auch Anmerkung 5. Die Bezeichnung Zykloide gebraucht hier *Bernoulli* für alle Kurven, die man jetzt Epizykloiden, Hypozikloiden und Perizykloiden nennt. Bei den Epizykloiden liegen die Kreise auf verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente, bei den Hypo- und Perizykloiden auf derselben Seite. Bei den Hypozykloiden ist der rollende, bei den Perizykloiden der feste Kreis der kleinere. Der rollende Kreis berührt den festen mit seiner Außenseite von außen (Epizykloide) oder mit seiner Außenseite von innen (Hypozykloide) oder mit seiner Innenseite von außen (Perizykloide). (Vgl. *Loria*, spezielle alg. und transz. Kurven II, S. 93.)

Daß eine Zykloide (im *Bernoulli*schen Sinne) eine mit sich selbst ähnliche Evolute hat, ist ein Satz, den z. B. *Cantor* und *Loria* auf *de la Hire* (1640—1718) zurückführen, ohne *Johann Bernoulli* auch nur zu erwähnen. Man müßte feststellen, ob *de la Hire* den Satz schon vor 1694, wo er etwas über Epizykloiden publizierte, irgendwie bekannt gemacht hat. Sollte nicht doch *Johann Bernoulli* ihn zuerst gefunden haben?

57) *Zu S. 95.* Gemeint ist ein rationales Verhältnis.

58) *Zu S. 96.* Die Teilung eines gegebenen Winkels φ in n gleiche Teile ist gleichbedeutend mit der Auflösung der algebraischen Gleichung

$$z^n = e^{i\varphi}.$$

Setzt man $z = x + iy$, so ist es leicht, eine algebraische Gleichung für x (oder y) zu finden.

59) *Zu S. 97.* Mechanische Kurven sind das, was wir jetzt transzendente Kurven nennen. Mechanisch heißt also nichtalgebraisch.

60) *Zu S. 97.* Eine Nichtzahl (numerus surdus) ist eine Irrationalzahl.

61) *Zu S. 98.* Vgl. den Schluß von Anm. 56. *De la Hire* hat auch die Rektifikation und Quadratur der Zykloiden (in *Bernoulli*schen Sinne) behandelt.

62) *Zu S. 100.* Um die Richtigkeit dieser Proportionen zu erkennen, muß man bedenken, daß die Winkel ACB, ECB, LCE usw. in Fig. 75 (Seite 99) infinitesimal sind. Es ist daher

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EQ}{EC} = \cdots = \sphericalangle ACB$$

Ferner hat man

$$\frac{OC}{AC} = \frac{SO}{EC} = \cdots = \sphericalangle FAE.$$

Also folgt

$$\frac{OC}{AB} = \frac{SO}{EQ} = \cdots = \frac{\sphericalangle FAE}{\sphericalangle ACB} = \frac{2b + 2a}{a}.$$

63) *Zu S. 103.* Bevor man ML differenziert, wird man den konstanten Faktor $a : 2(a + b)$ heraussetzen. Dann ist $\frac{1}{z}\sqrt{R}$ zu differenzieren, wobei $R = -z^4 + \cdots$ ist.

64) *Zu S. 103.* Es wäre besser gewesen, diese Vereinfachung vor der Differentiation vorzunehmen.

65) *Zu S. 109.* Betreffs der Spiralen vgl. die sehr sorgfältig gearbeitete Monographie von *A. Michalitschke*: »Die archimedische, die hyperbolische und die logarithmische Spirale«. (Prag, 1891.)

Die Spirale des *Archimedes* ($r = a\vartheta$) bildet mit dem Radiusvektor einen Winkel ω, der durch die Gleichung

$$\cot\omega = \frac{dr}{r\,d\vartheta} = \frac{a}{r}$$

bestimmt ist. Die Parabel $y^2 = 2ax$ bildet mit der Ordinate einen Winkel ω, für den die Gleichung $\cot\omega = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{y}$ gilt. Biegt man also die Parabel unter Wahrung der Winkel ω so, daß die Ordinaten y in einem Punkte zusammenstoßen, so erhält man die Spirale $r = a\vartheta$.

Ebenso läßt sich die logarithmische Spirale aus einem rechtwinkligen Dreieck zurechtbiegen (unter Wahrung des Winkels ω, der hier konstant ist).

66) *Zu S. 110.* In seiner Antwort auf den zweiten Brief *Newtons* (vom 24. Oktober 1676), die im Juli 1677 in London einlangte, hat *Leibniz* schon das Problem ausgesprochen, alle Kurven zu finden, die mit ihrer Evolute kongruent sind, also durch ihre eigene Abwicklung entstehen. Er sagt, das sei eine umgekehrte Tangentenaufgabe, und zwar eine schwierige. (Vgl. *Cantor*, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. III, S. 183).

Den einfachsten Ansatz findet man, wenn man die betrachtete Kurve durch die Gleichung

$$1)\qquad \varrho = f(\tau)$$

charakterisiert, wo ϱ der Krümmungsradius in einem Punkte P ist, und τ der Winkel, den die Tangente in P mit einer festen Achse bildet. Bei Bewegungen ändert sich τ um eine additive Konstante, während ϱ ungeändert bleibt (τ ist eine Integralinvariante, ϱ eine Differentialinvariante der Gruppe aller Bewegungen). Eine mit 1) kongruente Kurve wird also durch eine Gleichung von der Form

$$\varrho = f(\tau + c)$$

charakterisiert sein.

Geht man zur Evolute der Kurve 1) über, so tritt an die Stelle von τ offenbar $\tau + \frac{\pi}{2}$, an die Stelle von ϱ aber $\frac{d\varrho}{d\tau}$, weil $d\varrho$ das Bogenelement und $d\tau = d(\tau + \frac{\pi}{2})$ der Kontingenzwinkel der Evolute ist. Soll also die Evolute mit der Kurve kongruent sein, so muß aus 1) folgen

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = f(\tau + c),$$

es muß also

$$2)\qquad f'(\tau) = f(\tau + c)$$

sein. Dies ist die Funktionalgleichung des Problems.

Bei der logarithmischen Spirale ist $\varrho = ae^{k\tau}$, also $f(\tau) = ae^{k\tau}$ und wirklich

$$f'(\tau) = ake^{k\tau} = ae^{k\left(\tau + \frac{\log k}{k}\right)} = f\left(\tau + \frac{\log k}{k}\right).$$

Bei der Zykloide ist

$$\varrho = a \cos(\tau + b), \quad \text{also} \quad f(\tau) = a \cos(\tau + b)$$

und

$$f'(\tau) = -a \sin(\tau + b) = a \cos\left(\tau + b + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right).$$

Es liegt hiernach nahe, 2) durch den Ansatz

$$f(\tau) = \Sigma A e^{\varkappa t}$$

zu befriedigen. Man findet dann

$$f'(\tau) = \Sigma A \varkappa e^{\varkappa t}, \quad f(\tau + c) = \Sigma A e^{\varkappa c} e^{\varkappa t},$$

und 2) ist befriedigt, wenn

$$\varkappa = e^{\varkappa c}$$

ist. Man wird also für $\varkappa$ die Wurzeln dieser transzendenten Gleichung zu setzen haben. Wir wollen uns mit diesen Andeutungen begnügen.

Die Aufgabe, alle Kurven zu finden, die ihrer Evolute ähnlich sind, führt auf eine ähnliche Funktionalgleichung wie 2), nur daß rechts noch ein konstanter Faktor steht. *Euler* hat dieses Problem behandelt (1750).

Alle Kurven zu finden, die ihrer umgeklappten Evolute ähnlich oder kongruent sind, ist eine viel leichtere Aufgabe. Sie führt, da bei einer Umklappung τ in $-\tau + C$ übergeht, auf eine Funktionalgleichung von der Form

$$3) \qquad f'(\tau) = kf(c - \tau).$$

Man findet dann

$$f''(\tau) = -kf'(c - \tau) = -k^2 f(\tau)$$

also

$$f''(\tau) + k^2 f(\tau) = 0,$$

d. h.

$$f(\tau) = A \sin(k\tau + \beta)$$

Setzt man dies in 3) ein, so erkennt man, daß

$$kc + 2\beta = \frac{\pi}{2}$$

ist.

Die Kurve wird also durch die Gleichung

$$\varrho = A \sin(k\tau + \beta)$$

charakterisiert.

67) *Zu S. 110.* Vgl. zunächst Anm. 5. *Johann Bernoulli* hat 1692 für eine Brennlinie durch Reflexion den Namen Katakaustik, für eine durch Refraktion den Namen Diakaustik vorgeschlagen. Es handelt sich in beiden Fällen um ∞^1 Lichtstrahlen in der Ebene, die an einer Kurve reflektiert oder beim Passieren einer Kurve, die zwei verschiedene Medien voneinander abgrenzt, gebrochen werden. Man will die Enveloppe der reflektierten, bzw. gebrochenen Strahlen wissen.

Die Diakaustiken hat zuerst *Joh. Bernoulli* betrachtet. Die darauf bezüglichen Vorlesungen sind hier mit Rücksicht auf den Umfang des Bändchens ausgelassen. Sie bieten auch in methodischer Hinsicht nicht viel Neues im Vergleich zur Behandlung der Katakaustiken.

68) *Zu S. 111.* Acta Eruditorum, Nov. 1682. *Tschirnhausens* Satz über die Bogenlänge seiner Kaustik hat *Leibniz* bewiesen (in einem Brief an *Tschirnhaus*).

69) *Zu S. 112.* Es ergibt sich zunächst

$$z = \frac{y\,dy^2 \pm y\,dx^2}{dx^2 - dy^2}.$$

$z = -y$ ist aber unbrauchbar.

70) *Zu S. 117.* Um RL zu erhalten, beachte man, daß (Fig. 86)

$$RL = AL - AR = \frac{1}{2}\frac{a^2}{\sqrt{2ax - x^2}} - \sqrt{2ax - x^2}$$

ist (wegen $AR = HG$).

71) *Zu S. 118.* Man kann nur solche Ausdrücke mit Zirkel und Lineal konstruieren, die eine endliche Anzahl von Quadratwurzeloperationen aufweisen.

72) *Zu S. 118.* Weil man die Quadratwurzeln konstruieren kann.

73) *Zu S. 118.* Es läßt sich kaum annehmen, daß *Tschirnhausens* Irrtum hier richtig erklärt ist. Er arbeitete nur pour la gloire und daher immer sehr flüchtig. Von Gründlichkeit ist bei ihm nichts zu merken.

74) *Zu S. 119.* Dieser Beweis für die Verschiedenheit der beiden Kurven ist interessanter als der andere, weil er keine Formeln braucht.

75) *Zu S. 119.* Vgl. Anm. 68.

76) *Zu S. 122.* $ABHL$ setzt sich aus $AEB = \frac{2}{3}$ Rechteck AB und dem Trapez $ELHB$ zusammen.

Die Brennlinie der Parabel gehört übrigens zur Klasse der Sinusspiralen. Sie sind dadurch charakterisiert, daß die Projektion des Krümmungsmittelpunktes auf den Radiusvektor diesen in konstantem Verhältnis teilt, und haben eine natürliche Gleichung von der Form

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \left\{ \left(\frac{\varrho}{a} \right)^{\frac{2n}{n-1}} - 1 \right\}^{-\frac{1}{2}} d\varrho.$$

Viele bekannte Kurven (log. Spirale, gleichseitige Hyperbel, Kardioide, Lemniskate usw.) gehören zu dieser Kurvenfamilie.

77) *Zu S. 123.* Es ist nicht schwer, folgende Parameterdarstellung dieser Brennlinie zu finden (bezogen auf die Achsen FA, FC in Fig. 90):

$$x = -2a\cos^2\varphi + 4a\cos^4\varphi,$$

$$y = 2a\varphi + 4a\sin\varphi\cos^3\varphi.$$

Dabei ist φ der Winkel MFA. Mit Hilfe dieser Formeln kann man die *Bernoulli*schen Angaben leicht prüfen. Um z. B. den Punkt L zu finden, bildet man

$$\frac{dy}{d\varphi} = 2a + 4a\cos^4\varphi - 12a\sin^2\varphi\cos^2\varphi$$

$$= 2a - 12a\cos^2\varphi + 16a\cos^4\varphi = a\left\{ \left(4\cos^2\varphi - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right\}.$$

Diese Abteilung verschwindet, wenn $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $\frac{1}{2}$ ist. Dem ersten Wert entspricht der höchste Punkt, dem andern

der tiefste Punkt L der Brennlinie. Man findet wirklich $AE = 2a \sin^2 \varphi = \frac{3}{2}a$.

78) *Zu S. 124.* Da die Geraden DG, Dg einen infinitesimalen Winkel bilden, ist es erlaubt, von einer Parallelen zu sprechen.

79) *Zu S. 124.* Die Rechnungen bieten keine Schwierigkeit.

80) *Zu S. 131.* Dies liegt an der Wahl der Veränderlichen.

81) und 82) *Zu S. 136.* Es ist interessant, zu sehen, wie auch der leichtere Fall noch unüberwindliche Rechnungen bietet. Das Haften an den rechtwinkligen Koordinaten wirkt hier hemmend.

83) *Zu S. 138.* *Huygens* war der erste, der das *Leibniz*sche Problem löste. Die Lösung ist die semikubische Parabel.

84) *Zu S. 139.* Gd und Hc sind gleich wegen des »gleichmäßigen Abstiegs.«

85) *Zu S. 141.* Wieder fehlt die Integrationskonstante. Deshalb nachher die künstliche Interpretation »Dies ist ein Zeichen usw.«

86) *Zu S. 143.* Aus $y^3 = \frac{9}{4}ax^2$ folgt

$$\frac{3y'}{y} = \frac{2}{x}, \quad \frac{3y''}{y} - \frac{3y'^2}{y^2} = -\frac{2}{x^2},$$

also ist der Krümmungsradius

$$DR = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{-y''} = \frac{2y+2a}{a} \cdot \sqrt{y^2+ay}\,.$$

Bernoulli ahnt hier das *Huygens*sche Zykloidenpendel nach.

87) *Zu S. 145.* Auch diesen Spezialfall vermag *Bernoulli* auf seinem Wege nicht zu erledigen, was an der Bevorzugung der rechtwinkligen Koordinaten liegt. Hier sieht er dies übrigens selbst ein; denn einige Zeilen später sagt er: »Um eine andere Gleichung in den Differentialgrößen zu finden, die aus weniger Gleichungen besteht, muß man andere Größen als unbestimmte annehmen.« Bei früheren Gelegenheiten hat er, wie wir gesehen haben, diesen Grundsatz nicht befolgt.

Hier geschieht das Merkwürdige, daß er mit Hilfe der neuen Unbestimmten, für die er die Ableitung noch einmal durch-

führt, auch die alte Differentialgleichung in einfacherer Form wiederfindet. Auf diesem Umwege bemerkt er erst, daß der Bruch

$$\frac{xy^2 + axy \pm (x^2 + y^2)\sqrt{ay}}{ay^2 - x^2y} = \frac{(y + a)x\sqrt{y} \pm (x^2 + y^2)\sqrt{a}}{(ay - x^2)\sqrt{y}}$$

mit $x \pm \sqrt{ay}$ gekürzt werden kann. Weiter leisten die neuen Unbestimmten ihm keinen Dienst.

Hätte er in

$$\frac{dx \cdot \sqrt{y(x^2 - y^2)}}{\sqrt{a}} = xdy - ydx,$$

wo x der Radiusvektor AD ist, und $y = CD$ die Ordinate, noch $y = x \cos \varphi$ gesetzt, dann würde er folgende Differentialgleichung in Polarkoordinaten gefunden haben (wobei wir $x = r$ setzen wollen):

$$\frac{dr}{\sqrt{ar}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi}}$$

oder, wenn man statt φ noch $tg\frac{\varphi}{2} = t$ einführt,

$$\frac{dr}{\sqrt{ar}} = \frac{2dt}{\sqrt{1 - t^4}}.$$

Man gewinnt hieraus

$$\sqrt{\frac{r}{a}} = 2\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}.$$

Bei der Rektifikation der Lemniskate

$$t^2 = \cos 2\tau,$$

wo wir τ als Amplitude und t als Radiusvektor betrachten, tritt gerade das Integral $\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$ auf. Es mißt den Bogen vom Doppelpunkt der Lemniskate bis zu dem Punkte mit dem Radiusvektor $t = tg\frac{\varphi}{2}$, und $\sqrt{\frac{r}{a}}$ ist das Doppelte dieses Bogens.

88) *Zu S. 147.* Setzt man $m^2 = ar \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$, so entsteht eine Differentialgleichung in r, φ, wo die Variablen sich trennen lassen.

89) *Zu S. 147.* *Huygens* machte die Entdeckung, daß die Zykloide vollkommen isochrone Schwingungen herzustellen erlaubt. Horologium oscillatorium, II. Teil, Satz 25). Unabhängig von ihm bewies auch der Jesuit *Ignace Gaston Pardies* den Satz.

90) *Zu S. 151.* Vgl. Anm. 89.

91) *Zu S. 152.* In *Galileis* »Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze« (1638)* wird von der Kettenlinie gesprochen, und ihre Gestalt mit einer Parabel verglichen. *Joachim Jungius* (1669) zeigte, daß die Kurve keine Parabel ist, war aber nicht imstande, sie wirklich zu bestimmen. *Jakob Bernoulli* legte das Problem im Mai 1690 in den Acta Eruditorum aufs neue vor, und nun wurde es durch *Huygens*, *Leibniz* und *Johann Bernoulli* gelöst. Vgl. auch das Leibnizbändchen dieser Sammlung (Nr. 162).

92) *Zu S. 156.* Die logarithmische Kurve ist durch die Konstanz der Subtangente, also durch

$$y' = \frac{y}{c}$$

charakterisiert und hat daher die Gleichung

$$y = be^{cx}.$$

Wegen ihres Zusammenhanges mit der logarithmischen Kurve schlug *Leibniz* vor, die Kettenlinie als Logarithmentafel zu benutzen, besonders auf Reisen, weil es unbequem wäre, umfangreiche Tafeln »durch Länder und Meere zu schleppen.«

---

*) Ostwalds Klassiker Nr. 11, 24, 25.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig

Nr. 129. **Johann Friedrich Pfaff,** Allgemeine Methode, partielle Differentialgleichungen zu integriren. (1815.) Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgeg. von Gerhard Kowalewski. (84 S.) ℳ 1.75.

» 130. **N. J. Lobatschefskij,** Pangeometrie. (Kasan 1856.) Übers. u. herausg. v. Heinrich Liebmann. Mit 30 Textfig. 2. Auflage. (99 S.) ℳ 2.15.

» 133. **J. H. Lambert,** Bahnbestimmung der Cometen. Herausgegeben von J. Bauschinger. Mit 35 Textfiguren. (149 S.) ℳ 3.—.

» 135. **C. F. Gauss,** Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustand des Gleichgewichts. (1829.) Übers. v. Rudolf H. Weber. Herausg. v. H. Weber. Mit 1 Textfigur. (73 S.) ℳ 1.50.

» 138. **Christian Huygens,** Bewegung der Körper durch d. Stoß. Centrifugalkraft. Herausg. von F. Hausdorff. Mit 49 Textfig. (79 S.) ℳ 1.75.

» 141. **J. F. Encke,** Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen. — **P. A. Hansen,** Über d. Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Herausg. von J. Bauschinger. (162 S.) ℳ 3.15.

» 143. **C. Sturm,** Abhandl. über die Auflösung d. numerischen Gleichungen. 1835.) Aus dem Französischen übersetzt u. herausgeg. v. Alfred Loewy. (66 S.) ℳ 1.50.

» 144. **Johannes Kepler,** Dioptrik. (Augsburg 1611.) Übersetzt und herausgeg. v. Ferdinand Plehn. Mit 43 Textfiguren. (114 S.) ℳ 2.50.

» 146. **Joseph Louis Lagrange,** Über die Lös. d. unbestimmten Probleme zweiten Grades. (1768.) Aus dem Französischen übersetzt und herausgeg. von Eugen Netto. (131 S.) ℳ 2.75.

» 151. **L. Poinsot** (1809), **A. L. Cauchy** (1811), **J. Bertrand** (1858), **A. Cayley** (1859), Abhandlungen über die regelmäßigen Sternkörper. Übersetzt und herausgegeben von Robert Haußner. Mit 58 Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (128 S.) ℳ 3.50.

» 153. **Bernard Bolzano,** Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. — **Hermann Hankel,** Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen. Herausgegeben von Philip E. B. Jourdain. (115 S.) ℳ 2.25.

» 155. **Quintino Sella,** Abhandlungen zur Kristallographie. Herausgeg. von F. Zambonini in Neapel. Mit 8 Fig. im Text. (44 S.) ℳ 1.—.

» 156. **C. G. J. Jacobi,** Neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl von Veränderlichen. Herausgegeben von G. Kowalewski. (227 S.) ℳ 5.—.

» 162. **Leibniz,** Analysis des Unendlichen. Aus d. Latein. übers. u. herausgeg. von Gerhard Kowalewski. Mit 9 Textfiguren. (84 S.) ℳ 2.—.

» 164. **Newtons** Abhandl. üb. d. Quadratur d. Kurven (1704). Aus d. Latein. übers. u. herausg. v. G. Kowalewski. Mit 8 Textfig. (66 S.) ℳ 1.90.

» 165. **Johannes Kepler,** Neue Stereometrie der Fässer, besonders der in der Form am meisten geeigneten österreichischen, und Gebrauch der kubischen Visierrute. Mit einer Ergänzung zur Stereometrie des Archimedes. (1615.) Aus d. Latein. übers. u. herausgeg. von R. Klug. Mit 29 Textfiguren. (130 S.) ℳ 3.25.

» 167. **Lagrange, Rodrigues, Jacobi** und **Gauss,** Abhandlungen über die Prinzipien der Mechanik. Herausgeg. von Philip E. B. Jourdain. Mit 3 Abbildungen im Text. (68 S.) ℳ 1.75.

» 169. **Thomas Bayes,** Versuch zur Lösung eines Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Herausgeg. von H. E. Timerding. Mit 3 Textfiguren. (59 S.) ℳ 1.50.

» 171. **Jakob Bernoulli,** Über unendliche Reihen (1689—1704). Herausgeg. von G. Kowalewski. Mit 12 Figuren im Text. (141 S.) ℳ 3.15.

Nr. 177. **Carl Friedrich Gauß**, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Herausgegeben von J. Frischauf. Mit 2 Textabbildungen. (111 S.) ℳ 2.50.

» 181. **Méchain** und **Delambre**, Grundlagen des dezimalen metrischen Systems oder Messung des Meridianbogens zwischen den Breiten von Dünkirchen und Barcelona. — **Borda** und **Cassini**, Versuche über die Länge des Sekundenpendels in Paris. In Auswahl übersetzt und herausgeg. von Walter Block. Mit 2 Tafeln. (200 S.) ℳ 4.25.

» 184. **Johann Soldner**, Theorie der Landesvermessung (1810.) Herausgegeben von J. Frischauf. Mit 9 Textabbildg. (76 S.) ℳ 2.—.

» 185. **Paul du Bois-Reymond**, Zwei Abhandlungen über unendliche (1871) u. trigonometr. Reihen (1874.) Herausgeg. v. Philip E. B. Jourdain. I. u. II. Abhandl. (115 S.) ℳ 3.75.

» 186. **Paul du Bois-Reymond**, Abhandlung über die Darstellung der Funktionen durch trigonometr. Reihen (1876.) Herausgeg. von Philip E. B. Jourdain. III. Abhandl. Mit 4 Abbild. im Text. (140 S.) ℳ 5.—.

» 189. **Clairaut**, Theorie der Erdgestalt nach Gesetzen der Hydrostatik. Herausgegeben von Ph. E. B. Jourdain und A. v. Oettingen. Mit 54 Fig. im Text. (160 S. Mit 1 Bildnis.) ℳ 4.60.

» 191. **Isaac Newton** (1687), **Daniel Bernoulli** (1745) und (1748), **Patrick d'Arcy** (1747), Abhandlungen über jene Grundsätze der Mechanik, die Integrale der Differentialgleichungen liefern. Aus dem Lateinischen und Französischen übersetzt von A. v. Oettingen. Herausgegeben von **Philip E. B. Jourdain.** Mit 34 Textfiguren. (110 S.) ℳ 2.80.

» 194. **Johann Bernoulli**, Die erste Integralrechnung. Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 119 Textfiguren. ℳ 5.—.

Nr. 177. **Carl Friedrich Gauß**, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. Herausgegeben von J. Frischauf. Mit 2 Textabbildungen. (111 S.) ℳ 2.50.

» 181. **Méchain** und **Delambre**, Grundlagen des dezimalen metrischen Systems oder Messung des Meridianbogens zwischen den Breiten von Dünkirchen und Barcelona. — **Borda** und **Cassini**, Versuche über die Länge des Sekundenpendels in Paris. In Auswahl übersetzt und herausgeg. von Walter Block. Mit 2 Tafeln. (200 S.) ℳ 4.25.

» 184. **Johann Soldner**, Theorie der Landesvermessung (1810.) Herausgegeben von J. Frischauf. Mit 9 Textabbildg. (76 S.) ℳ 2.—.

» 185. **Paul du Bois-Reymond**, Zwei Abhandlungen über unendliche (1871) u. trigonometr. Reihen (1874.) Herausgeg. v. Philip E. B. Jourdain. I. u. II. Abhandl. (115 S.) ℳ 3.75.

» 186. **Paul du Bois-Reymond**, Abhandlung über die Darstellung der Funktionen durch trigonometr. Reihen (1876.) Herausgeg. von Philip E. B. Jourdain. III. Abhandl. Mit 4 Abbild. im Text. (140 S.) ℳ 5.—.

» 189. **Clairaut**, Theorie der Erdgestalt nach Gesetzen der Hydrostatik. Herausgegeben von Ph. E. B. Jourdain und A. v. Oettingen. Mit 54 Fig. im Text. (160 S. Mit 1 Bildnis.) ℳ 4.60.

» 191. **Isaac Newton** (1687), **Daniel Bernoulli** (1745) und (1748), **Patrick d'Arcy** (1747), Abhandlungen über jene Grundsätze der Mechanik, die Integrale der Differentialgleichungen liefern. Aus dem Lateinischen und Französischen übersetzt von A. v. Oettingen. Herausgegeben von **Philip E. B. Jourdain**. Mit 34 Textfiguren. (110 S.) ℳ 2.80.

» 194. **Johann Bernoulli**, Die erste Integralrechnung. Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski. Mit 119 Textfiguren. ℳ 5.—.

DATE DUE			